Dr. Theo Lettmann

Paderborn, den 24. Oktober 2003
Abgabe 3. November 2003

Übungen zur Vorlesung
Modellierung
WS 2003/2004
Blatt 2 Musterlösungen

AUFGABE 9 :
Es werden die Menge $M = \{1, 2, 3, ..., 15\}$ und ihre Teilmengen $A = \{1, 3, 5, 7, ..., 15\}$, $B = \{4, 8, 12\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, ..., 15\}$ betrachtet. Bestimmen Sie $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, $C \setminus B$, $B \setminus C$ und $B \Delta C$.

Lösung:
Für die Vereinigung werden einfach beide Mengen zusammengenommen.

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, ..., 15\} \cup \{4, 8, 12\} = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15\}$$

Beim Schnitt werden alle Elemente genommen, die in beiden Mengen enthalten sind. A und B besitzen aber keine gemeinsamen Elemente, weshalb der Schnitt von beiden leer ist.

$$A \cap B = \{1, 3, 5, 7, ..., 15\} \cap \{4, 8, 12\} = \emptyset$$

A und C besitzen gemeinsame Elemente. Da A alle ungeraden Zahlen enthält, erhält man alle ungeraden Zahlen aus C.

$$A \cap C = \{1, 3, 5, 7, ..., 15\} \cap \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, ..., 15\} = \{9, 11, 13, 15\}$$

Um $C \setminus B$ zu bilden, müssen alle Elemente von B aus C entfernt werden.

$$C \setminus B = \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, ..., 15\} \setminus \{4, 8, 12\} = \{2, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 15\}$$

Umgekehrt entfernt man für $B \setminus C$ alle Elemente von C aus B.

$$B \setminus C = \{4, 8, 12\} \setminus \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, ..., 15\} = \emptyset$$

Die symmetrische Differenz von $B \Delta C$ kann als $(B \setminus C) \cup (C \setminus B)$ gebildet werden.

$$B \Delta C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B) = \{2, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 15\} \cup \emptyset = \{2, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 15\}$$

AUFGABE 10 :
Es sei $A = \{a, b, c, d, e\}$ und $B = \{M | M \subseteq A\}$. Überprüfen Sie die folgenden Aussagen:
a) $a \in B$, b) $\{b\} \in B$, c) $\{a\} \in A$, d) $A \in B$, e) $A \subseteq B$, f) $\{a\} \subseteq A$,
g) $\emptyset \in A$, h) $\emptyset \subseteq A$, i) $\{\emptyset\} \subseteq A$, j) $\emptyset \in B$, k) $\emptyset \subseteq B$, l) $\{\emptyset\} \subseteq B$.

Lösung:
Nach der obigen Definition von B gilt $B = \wp(A)$. B enthält somit als Elemente sämtliche Teilmengen von A.

a) a ist kein Element von B, da B nur Teilmengen von A enthält. a ist aber keine Teilmenge von A, sondern ein Element von A. Die Aussage ist daher falsch.

b) Es gilt $\{b\} \subseteq A$, weshalb $\{b\} \in B$ wahr ist.

c) $\{a\}$ ist eine Teilmenge, aber kein Element von A. Die Aussage ist falsch.

d) $A \in B$ ist wahr, da $A \subseteq A$ gilt.

e) $A \subseteq B$ ist falsch, weil B als Potenzmenge nur Teilmengen von A enthält. Jede Teilmenge von B kann somit nur eine Menge aus Teilmengen von A sein.

f) Es gilt $a \in A$ weshalb die Menge $\{a\}$ eine Teilmenge von A ist. Die Aussage ist wahr.

g) Die leere Menge ist kein Element von A, dies sind nur a, b, c, d und e. Die Aussage ist falsch.

h) Die leere Menge ist eine Teilmenge von A, da man sie bilden kann, indem man kein Element aus A für die Teilmenge „auswählt". Die Aussage ist wahr.

i) Nach g) ist die leere Menge kein Element von A und somit $\{\emptyset\}$ auch keine Teilmenge von A. Die Aussage ist falsch.

j) Wegen h) ist die leere Menge eine Teilmenge von A. Nach Definition von B ist die Aussage somit wahr.

k) Die leere Menge ist wegen der gleichen Argumentation wie bei h) eine Teilmenge von B (wie überhaupt von jeder Menge). Die Aussage ist wahr.

l) Da nach j) die leere Menge ein Element von B ist, ist auch $\{\emptyset\} \subseteq B$ wahr.

AUFGABE 11 :
A, B, C und D seien beliebige Mengen. Untersuchen Sie die Richtigkeit folgender Gleichungen:

a) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$

b) $A \setminus B = A \cap (A \setminus B)$

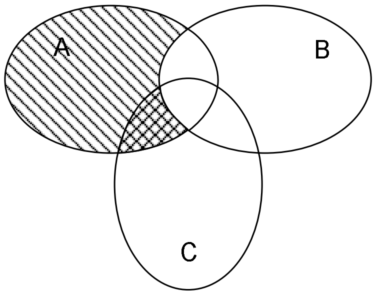
c) $A = (A \setminus B) \cup B$

Lösung:
Um die Mengengleichheit zweier Mengen A und B zu zeigen, ist es normalerweise am einfachsten einzeln $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ zu zeigen. Außerdem geht man für solche Beweise meist auf ein festes, aber beliebig gewähltes Element der jeweils linken Menge zurück.

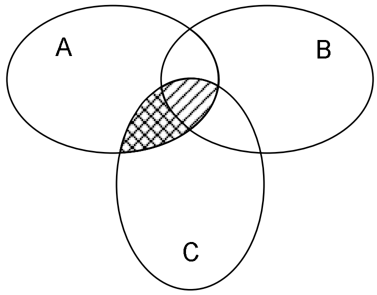
a) Sei $x \in (A \setminus B) \cap C$ fest aber beliebig gewählt. Dann gilt $x \in A \setminus B$ und $x \in C$. Dies bedeutet aber auch, dass $x \in A$ und $x \notin B$ und $x \in C$ gilt. Dies ist nun gleichbedeutend mit $x \in A$ und $x \in C$ und $x \notin B$ bzw. $x \in A \cap C$ und $x \notin B$. Schließlich erhält man $x \in (A \cap C) \setminus B$. Da x beliebig gewählt wurde folgt daraus $(A \setminus B) \cap C \subseteq (A \cap C) \setminus B$

   Wählt man nun $x \in (A \cap C) \setminus B$ kann man obige Argumentation rückwärts verfolgen und erhält $(A \cap C) \setminus B \subseteq (A \setminus B) \cap C$.

   Insgesamt folgt also die geforderte Aussage der Mengengleichheit.



$(A \setminus B) \cap C$

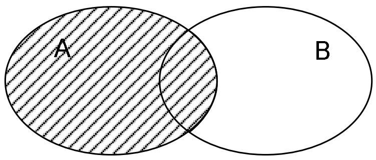


$(A \cap C) \setminus B$

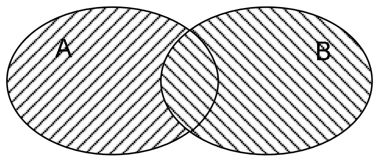
b) Sei $x \in A \setminus B$ fest aber beliebig gewählt. Dann gilt $x \in A$ und $x \notin B$. Dies ist äquivalent zur Aussage $x \in A$ und $x \in A$ und $x \notin B$, was man in $x \in A$ und $x \in A \setminus B$ und somit in $x \in A \cap (A \setminus B)$ übertragen kann. Die Rückrichtung ergibt sich auf die gleiche Weise.

c) Die Aussage $A = (A \setminus B) \cup B$ ist im Allgemeinen falsch. Enthält B ein Element, das nicht in A enthalten ist, so wird dieses durch die Vereinigung mit B der Menge $(A \setminus B) \cup B$ hinzugefügt. Somit erhält man ein Element, dass in der Menge auf der rechten Seite der Aussage enthalten ist, jedoch nicht auf der linken.

   Die Gleichheit ist also falsch.



A



$(A \setminus B) \cup B$

Wie man sieht kann man häufig Aussagen über Mengen auf logische Aussagen mit „und" und „oder" zurückführen.

AUFGABE 12 :
Man erweitert Funktionen $f : A \to B$ oft zu Funktionen $F : \wp(A) \to \wp(B)$ auf Teilmengen, durch $F(x) = \{y | y = f(x), x \in X\}$ für $X \subseteq A$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen für $X, Y \subseteq A$ gelten.

a) $X \subseteq Y \Rightarrow F(X) \subseteq F(Y)$,

b) $F(X \cup Y) = F(X) \cup F(Y)$ und

c) $F(X \cap Y) \subseteq F(X) \cap F(Y)$

Zeigen Sie außerdem, dass in c) die Gleichheit im Allgemeinen nicht gilt.

Lösung:

a) Sei $X, Y \subseteq A$ fest, aber beliebig gewählt mit der Eigenschaft $X \subseteq Y$. Dann ist zu zeigen: $F(X) \subseteq F(Y)$.

   Wähle $z \in F(X)$ beliebig. Dann gibt es nach Definition ein $a \in X$ mit $z = f(a)$. Wegen $X \subseteq Y$ gilt aber auch $a \in Y$, woraus $z = f(a) \in F(Y)$ folgt. Es ist also jedes $z \in F(X)$ auch in $F(Y)$ enthalten. Es gilt somit $F(X) \subseteq F(Y)$.

b) Sei $X, Y \subseteq A$ fest, aber beliebig gewählt. Dann ist zu zeigen: $F(X \cup Y) \subseteq F(X) \cup F(Y)$ und $F(X) \cup F(Y) \subseteq F(X \cup Y)$.

$F(X \cup Y) \subseteq F(X) \cup F(Y)$
Sei $z \in F(X \cup Y)$ fest aber beliebig gewählt. Dann gibt es ein $a \in X \cup Y$ mit $z = f(a)$. Für a gilt dann $a \in X$ oder $a \in Y$.

1. Fall: Ist $a \in X$, so folgt daraus $z = f(a) \in F(X)$.
2. Fall: Ist $a \in Y$, so folgt daraus $z = f(a) \in F(Y)$.

Somit ist z in $F(X)$ oder $F(Y)$ enthalten, also $z \in F(X) \cup F(Y)$. Es folgt $F(X \cup Y) \subseteq F(X) \cup F(Y)$.

$F(X) \cup F(Y) \subseteq F(X \cup Y)$: Es sei nun $z \in F(X) \cup F(Y)$. Dann existiert ein $a \in X$ oder ein $a \in Y$ mit $z = f(a)$. Damit gilt aber auch $a \in X \cup Y$ und somit $z = f(a) \in F(X \cup Y)$. Deshalb ist $F(X) \cup F(Y) \subseteq F(X \cup Y)$. Insgesamt gilt also $F(X \cup Y) = F(X) \cup F(Y)$.

c) Sei $X, Y \subseteq A$ fest, aber beliebig gewählt. Dann ist zu zeigen: $F(X \cap Y) \subseteq F(X) \cap F(Y)$.

Wähle $z \in F(X \cap Y)$ beliebig. Daher gibt es ein $a \in X \cap Y$ mit $z = f(a)$. Dann ist auch $a \in X$ und $a \in Y$ und somit $z \in F(X)$ und $z \in F(Y)$. Es folgt $z \in F(X) \cap F(Y)$. Daraus folgt $F(X \cap Y) \subseteq F(X) \cap F(Y)$.

Dass die Gleichheit im Allgemeinen nicht gilt, kann man sich relativ einfach überlegen.

Damit die Inklusion nicht gilt, muss man zwei verschiedene Elemente haben, die das gleiche Bild unter f haben, ein Element $a_1 \in X \setminus Y$, das in X jedoch nicht in Y enthalten ist und ein Element $a_2 \in Y \setminus X$, das in Y jedoch nicht in X enthalten ist.

Wir wählen also einen Grundbereich A mit mindestens zwei Elementen $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 \neq a_2$.
Wählen wir $X = \{a_1\}$ und $Y = \{a_2\}$, so gilt $a_1 \notin X \cap Y$ und $a_2 \notin X \cap Y$ und $X \cap Y = \emptyset$.

Wir wählen weiter einen Grundbereich B mit mindestens einem Element $b \in B$.
Wählen wir $f : A \to B$ mit $f(x) = b$ für alle $x \in A$, so gilt $f(a_1) = b = f(a_2)$.

Dann folgt $b \in F(X)$ und $b \in F(Y)$ und somit $b \in F(X) \cap F(Y)$.

Wegen $X \cap Y = \emptyset$ gilt jedoch $F(X \cap Y) = \emptyset$.

$F(X) \cap F(Y) \subseteq F(X \cap Y)$ gilt in diesem Fall also nicht.

AUFGABE 13 :
Die Fibonacci-Zahlen f_n, $n \in \mathbb{N}_+$, seien definiert durch $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ und $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ $(n \geq 2)$. Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt: $\mathrm{ggT}\,(f_n, f_{n+1}) = 1$.

Lösung:
Diese Aufgabe lässt sich leichter lösen, wenn man vorher den ggT etwas genauer betrachtet. Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Es wird zuerst bewiesen, dass folgende Aussage gilt:

$$\mathrm{ggT}\,(a, b) = \begin{cases} \mathrm{ggT}\,(a, b - a), & \text{falls } a < b \\ \mathrm{ggT}\,(a - b, b), & \text{falls } a > b \\ a, & \text{falls } a = b \end{cases}$$

Ist $a = b$, so gilt $\mathrm{ggT}\,(a, a) = a$, da $a|a$ gilt, und es keine größere Zahl gibt, die a teilt.
Dann kann man o.B.d.A. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) annehmen, dass $b > a$ sein soll. (Die Aussage "ohne Beschränkung der Allgemeinheit" leitet einen Fall einer Fallunterscheidung ein, hier $a > b$ oder $a < b$ oder $a = b$. Der Einschub o.B.d.A. bedeutet dann, dass der Beweis nicht für alle Fälle gegeben wird, sondern nur für den einen Fall. Die Vervollständigung des Beweises ist ohne Schwierigkeiten möglich, da nur sehr einfache Fälle nicht betrachtet werden oder die anderen Fälle analog bewiesen werden können.)
Sei $d = \mathrm{ggT}\,(a, b)$. Um die Aussage zu beweisen, muss bewiesen werden, dass d ein Teiler von $b - a$ ist (Teil I), und dass d der größte Teiler ist, der a und $b - a$ teilt (Teil II).

Teil I:
Aus $d = \mathrm{ggT}\,(a, b)$ folgt, dass a und b durch d teilbar sind. Damit gibt es $x, y \in \mathbb{N}$ mit $a = dx$ und $b = dy$. Daraus folgt

$$b - a = dy - dx = d(y - x)$$

Wegen $b > a$ gilt auch $y > x$ und somit $y - x \in \mathbb{N}$. Daher ist $b - a$ in den natürlichen Zahlen durch d teilbar.

Teil II:
Der zweite Teil wird durch einen Widerspruchsbeweis bewiesen. Dazu wird zuerst angenommen, dass die Aussage nicht gilt, um dann damit zu zeigen, dass dies unmöglich so sein kann. W iderspruchsbeweise werden häufig bei Aussagen eingesetzt, die eine gewisse Optimalität — hier die Maximalität des ggT — beinhalten. Wir nehmen daher an, dass es eine Zahl $e \in \mathbb{N}$ gibt, mit $e = \mathrm{ggT}\,(a, b - a)$ und $e > d$. Damit muss e sowohl a als auch $b - a$ teilen. Es gibt deshalb $x, y \in \mathbb{N}$ mit

$$a = ex \text{ und } b - a = ey.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} ey = b - a &= b - ex \qquad | + ex \\ \Leftrightarrow \quad b &= ey + ex = e(y + x). \end{aligned}$$

Es ist auch $y + x \in \mathbb{N}$, weshalb b durch e teilbar ist. Somit sind sowohl a als auch b durch e teilbar. e ist also gemeinsamer Teiler von a und b. Da e größer als d angenommen wurde, ist damit $e = \mathrm{ggT}\,(a, b)$. Dies steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $d = \mathrm{ggT}\,(a, b)$ sein soll. Die Aussage „$e = \mathrm{ggT}\,(a, b - a)$ und $e > d$" muss daher falsch sein. Es gibt also keine größere Zahl als d, die sowohl a als auch $b - a$ teilt. Zusammen mit dem ersten Teil des Beweises ergibt dies

$$\mathrm{ggT}\,(a, b) = d = \mathrm{ggT}\,(a, b - a), \text{ wenn } b > a$$

Für die Fibonacci-Zahlen kann man dann per Induktion die geforderte Aussage beweisen.

Induktionsanfang:

$$\mathrm{ggT}\,(f_1, f_2) = \mathrm{ggT}\,(1, 1) = 1$$

Induktionsvoraussetzung:
Die Aussage gelte für f_n, es sei also $\mathrm{ggT}\,(f_{n-1}, f_n) = 1$.

Induktionsschritt:
Man betrachte $\operatorname{ggT}(f_n, f_{n+1})$. Wegen $f_{n+1} > f_n$ und $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ folgt

$$\operatorname{ggT}(f_n, f_{n+1}) = \operatorname{ggT}(f_n, f_{n+1} - f_n) = \operatorname{ggT}(f_n, f_{n-1}) \overset{IV}{=} 1$$

und somit die Aussage.

KORREKTURAUFGABE 14 :
Überprüfen Sie die folgenden 2-stelligen Relation auf die Eigenschaften Symmetrie, Asymmetrie, Antisymmetrie, Reflexivität, Irreflexivität, Transitivität und Alternativität. Geben Sie außerdem an, ob es sich bei den Relationen um Äquivalenz- oder Ordnungsrelationen handelt.

1. „$\subseteq$“ $\subseteq \wp(M) \times \wp(M)$ (M - beliebige Menge) mit $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; A$ ist Teilmenge von B $(A, B \subseteq M)$
2. „|“ $\subseteq \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$ mit $a|b \;\Leftrightarrow\; a$ teilt b $(a, b \in \mathbb{N}_+)$
3. $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\} \subseteq \{1,2,3,4\}^2$
4. „verheiratet mit“ $\subseteq H \times H$ (H - Menge aller Menschen)
5. „weiß mehr als“ $\subseteq H \times H$

Die Relationen 4 und 5 gehen nicht in die Bewertung ein.

Lösung:
Seien $A, B, C \in \wp(M)$. Gilt $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, so sind alle Elemente von A auch in B enthalten und umgekehrt. Es folgt $A = B$. Die Relation ist also **antisymmetrisch**. Ist A eine echte Teilmenge von B, kann B keine Teilmenge von A sein, da B mehr Elemente enthält. Die Relation ist also **nicht symmetrisch**. Wegen $A \subseteq A$ ist sie außerdem **nicht asymmetrisch**, da sonst die Gegenrichtung, also wieder $A \subseteq A$, nicht gelten dürfte (siehe Aufgabe 15). Aus dem gleichen Grund ist die Relation auch **reflexiv** und **nicht irreflexiv**. Gilt $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, so enthält B alle Elemente aus A und C alle aus B. Damit besitzt C auch alle Elemente aus A. Es gilt also $A \subseteq C$ und „$\subseteq$“ ist somit **transitiv**. Besitzen A und B jeweils verschiedene Element, so gilt $A \not\subseteq B$ und $B \not\subseteq A$. Die Relation ist somit **nicht alternativ**. „$\subseteq$“ ist eine Ordnungsrelation.

Seien $a, b, c \in \mathbb{N}_+$. Wegen $a = 1 \cdot a$ folgt $a|a$, weshalb die Relation **reflexiv** und **nicht irreflexiv** ist. Aus $a|b$ folgt weiterhin, dass es ein $x \in \mathbb{N}_+$ gibt mit $b = ax$. Würde außerdem $b|a$ gelten, so gäbe es ein $y \in \mathbb{N}_+$ mit $a = by$. Es folgt $b = ax = byx$. Wegen $x, y \in \mathbb{N}_+$ muss daher $x = y = 1$ und somit $a = b$ folgen. „|“ ist somit **nicht symmetrisch, nicht asymmetrisch** und **antisymmetrisch**. Gelte nun $a|b$ und $b|c$, dann gibt es $x, y \in \mathbb{N}_+$ mit $b = ax$ und $c = by$. Somit gilt $c = axy$. Daraus folgt $a|c$. „|“ ist also **transitiv**. Dass die Relation **nicht alternativ** ist, kann man mit einen einfachen Gegenbeispiel zeigen, etwa $2 \nmid 3$ und $3 \nmid 2$. „|“ ist eine Ordnungsrelation.

Zur Betrachtung von R müssen die einzelnen Paare überprüft werden. Wegen $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\} \subseteq R$ ist R **reflexiv** und **nicht irreflexiv**. Wenn man alle Paare der Form aRa weglässt gibt es kein Paar, mit aRb und bRa.

Es gilt $1R2$ aber nicht $2R1$.
Es gilt $1R3$ aber nicht $3R1$.

Es gilt $1R4$ aber nicht $4R1$.
Es gilt $2R3$ aber nicht $3R2$.
Es gilt $2R4$ aber nicht $4R2$.
Es gilt $3R4$ aber nicht $4R3$.

Es gilt jedoch aRa für alle $a \in \{1, 2, 3, 4\}$. Somit ist R **nicht symmetrisch, nicht asymmetrisch** und **antisymmetrisch**. Um die Transitivität zu prüfen, muss etwas mehr Aufwand betrieben werden. Zu jedem $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ muss $(a, c) \in R$ gelten. Die reflexiven Paare müssen dazu nicht betrachtet werden, da sie keine Veränderung bewirken: Dass aus aRa und aRb folgt, dass aRb gilt ist immer wahr.

Aus $1R2$ und $2R3$ folgt $1R3$ ist wahr.
Aus $1R2$ und $2R4$ folgt $1R4$ ist wahr.
Aus $1R3$ und $3R4$ folgt $1R4$ ist wahr.
Für $1R4$ gibt es kein Paar, außer $(4, 4)$, welches man transitiv hinzufügen kann.
Aus $2R3$ und $3R4$ folgt $2R4$ ist wahr.
Für $2R4$ gibt es kein Paar, außer $(4, 4)$, welches man transitiv hinzufügen kann.
Für $3R4$ gibt es kein Paar, außer $(4, 4)$, welches man transitiv hinzufügen kann.

Damit ist R **transitiv**. Für die Alternativität muss für alle Kombinationen von $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$ mit $a \neq b$ nachgeprüft werden, ob entweder $(a, b) \in R$ oder $(b, a) \in R$ ist.

$a = 1, b = 2$: $(1, 2) \in R$ aber nicht $(2, 1) \in R$
$a = 1, b = 3$: $(1, 3) \in R$ aber nicht $(3, 1) \in R$
$a = 1, b = 4$: $(1, 4) \in R$ aber nicht $(4, 1) \in R$
$a = 2, b = 3$: $(2, 3) \in R$ aber nicht $(3, 2) \in R$
$a = 2, b = 4$: $(2, 4) \in R$ aber nicht $(4, 2) \in R$
$a = 3, b = 4$: $(3, 4) \in R$ aber nicht $(4, 3) \in R$

Damit ist R also auch **alternativ**. Auch R ist eine (sogar totale) Ordnungsrelation

Die Eigenschaften der Relation kann man auch gut an folgendem Diagramm ablesen.

	1	2	3	4
1	+	+	+	+
2		+	+	+
3			+	+
4				+

Das Diagramm, und somit die Relation, ist nicht symmetrisch. Wenn es Elemente gibt, für die die Relation in beiden Richtungen gilt, so stehen diese auf der Hauptdiagonalen. Dies bedingt die Antisymmetrie. Alle Stellen auf der Hauptdiagonalen sind belegt, was die Reflexivität anzeigt. Auch Transitivität und Alternativität kann man hier relativ einfach daran erkennen, dass die gesamte rechte obere Dreiecksmatrix belegt ist. Dies ist im Allgemeinen nicht so einfach.

„verheiratet mit“ ist **irreflexiv** und **nicht reflexiv**, da man nicht mit sich selbst verheiratet sein kann. Seien $A, B, C \in H$. Ist A verheiratet mit B, so ist auch B verheiratet mit A. A und B müssen dabei verschieden sein. Die Relation ist somit **symmetrisch, nicht asymmetrisch** und **nicht antisymmetrisch**. Ist A mit B verheiratet und B mit C verheiratet, so ist dies (normalerweise) nur dann möglich, wenn $C = A$ ist. Es ist aber A nicht mit sich selbst verheiratet, weshalb die Relation **nicht transitiv** ist. Wählt man zwei Menschen aus, so sind diese nicht unbedingt verheiratet. Verheiratet sein ist also auch **nicht alternativ**.

Wie sieht es nun mit „weiß mehr als“ aus? Man kann nicht mehr wissen als man selbst. Die Relation ist daher **irreflexiv** und **nicht reflexiv**. Seien $A, B, C \in H$. Wenn A mehr als B weiß, so kann B nicht mehr als A wissen. Mehr wissen ist also **asymmetrisch, nicht symmetrisch**. Aufgrund der Asymmetrie gibt es nie ein Paar für das die Vorbedingung für Antisymmetrie gelten würde. Damit ist die Relation **antisymmetrisch**. Wenn A mehr als B weiß und B mehr als C weiß, so weiß auch A mehr als C. Die Relation ist **transitiv**. Damit ist die Relation eine strenge Ordnung. Wählt man nun zwei Menschen A und B, so weiß A mehr als B, B mehr als A oder beide wissen gleich viel. Sollten zwei Personen gleich viel wissen, so können sie durch diese Relation nicht in Verbindung gebracht werden. Mehr Wissen ist also **nicht alternativ**.

AUFGABE 15 :
Ist eine asymmetrische Relation immer irreflexiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:
Für eine asymmetrische Relation R auf einer Menge M gilt immer

$$\text{für alle } x, y \in M \text{ gilt: aus } (x, y) \in R \text{ folgt } (y, x) \in R \text{ gilt nicht}$$

Würde $(x, x) \in R$ für ein $x \in M$ gelten, so dürfte daher die Relation für das umgekehrte Tupel nicht gelten, d.h. $(x, x) \notin R$. Daher kann die Relation nur irreflexiv sein.

AUFGABE 16 :
Seien $a, b, n \in \mathbb{N}$. Ergeben a und b bei Division durch n den gleichen Rest, so sagt man „a ist kongruent zu b modulo n“, geschrieben:

$$a \equiv b \bmod n$$

Dies ist somit eine Relation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Beispiel: $7 \equiv 2 \bmod 5$, da $7 \div 5 = 1$ Rest 2 und $2 \div 5 = 0$ Rest 2.

Geben Sie die Eigenschaften dieser Relation an (siehe Aufgabe 14). Liegt eine Relation speziellen Typs vor?

Lösung:
Seien $a, b, c, n \in \mathbb{N}$

Reflexivität:
$a \equiv a \bmod n$, da a jeweils bei Division durch n den gleichen Rest liefert. Die Kongruenz ist daher reflexiv und nicht irreflexiv.

Symmetrie:
Gilt $a \equiv b \bmod n$, so liefern a und b bei Division durch n den gleichen Rest. Es gilt daher auch $b \equiv a \bmod n$. Die Relation ist somit symmetrisch. Es folgt jedoch nicht, dass $a = b$ sein muss, weshalb keine Antisymmetrie vorliegt. Ebenso ist die Relation nicht asymmetrisch.

Transitivität:
Es gelte $a \equiv b \bmod n$ und $b \equiv c \bmod n$. Dividiert man a durch n so erhält man einen Rest r. Aufgrund der ersten Kongruenz erhält man diesen jedoch auch, wenn man b durch n teilt. Die zweite Kongruenz bedeutet dann aber auch, dass bei Division von c durch n der gleiche Rest r heraus kommt. Damit gilt auch $a \equiv c \bmod n$. Die Relation ist also transitiv.

Alternativiät:
Wählt man $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x \neq y$, so muss nicht unbedingt entweder $x \equiv y \bmod n$ oder $y \equiv x \bmod n$ gelten. Etwa $4 \not\equiv 5 \bmod 3$ und $5 \not\equiv 4 \bmod 3$. Es liegt also keine Alternativität vor.

Die Kongruenz ist damit symmetrisch, reflexiv und transitiv und somit eine Äquivalenzrelation. Man benutzt Äquivalenzrelationen häufig um Äquivalenzklassen zu bilden. Das sind Mengen von äquivalenten Elementen. Im Fall der Kongruenz nennt man diese Restklassen. Betrachtet man etwa die Zahlen modulo 3, so bilden 1,4,7,10,13,16,... alle den Rest 1. Man kann sie also alle in eine Klasse zusammenfassen, die durch einen Vertreter (z.B. die 1) repräsentiert wird. So braucht man in diesem Falle nur die Klassen zu betrachten, die durch 0,1 und 2 vertreten werden. Man kann dafür dann auch Operationen definieren, z.B. $1 + 2 = 3 \equiv 0 \bmod 3$, also $1 + 2 = 0$, oder $2 + 2 = 1$. Solche Restklassensysteme spielen in der Kryptographie eine gewisse Rolle.