Dr. Theo Lettmann

Paderborn, den 17. Oktober 2003
Abgabe 27. Oktober 2003

Übungen zur Vorlesung
Modellierung
WS 2003/2004
Blatt 1 Musterlösungen

AUFGABE 1 :
Welche Aussagen sind wahr, welche falsch?

a) Für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt $0 < x + 1$.

b) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq -n^2$.

c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x < x + 1$.

d) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x < x^2$.

e) Wenn $12345 \cdot 98765 < 12349876$ und $(-4)^2 \leq 0$, dann $\pi^2 > 9$.

f) Die Aussage $(0 < 1 \Longrightarrow 2 < 1)$ ist falsch.

g) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $(x < x^2 \Longrightarrow x < x + 1)$.

h) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $(x < x + 1 \Longrightarrow x < x^2)$.

Lösung:
In dieser Aufgabe soll die Bestimmung der Wahrheitswerte für zusammengesetzte Aussagen geübt werden. Das heißt für:

- Allaussagen:
  Alle Einsetzungen überprüfen, die möglich sind (zumindest im Prinzip).
- Existenzaussagen:
  Eine Einsetzung finden, die die Aussage wahr macht.
- Und-Aussagen, Oder-Aussage, Negation:
  Beide Teilaussagen auf Wahrheitswert wahr überprüfen.
- Wenn-Dann-Aussage
  Dann-Aussage überprüfen unter der Voraussetzung, dass Wenn-Aussage Wahrheitswert wahr hat.

Für die obigen Aussagen gilt:

a) Als Werte für x sind nur natürliche Zahlen zugelassen. Wahrheitswert wahr, denn Einsetzung $x = 0$ liefert $0 < 1$. Alle weiteren Einsetzungen für x liefern noch größere Werte auf der rechten Seite der Ungleichung.

b) Wahrheitswert wahr, denn Einsetzung $x = 0$ liefert $0 \leq 0 = -0^2$. Alle weiteren natürlichen Zahlen als Einsetzungen für x liefern Aussagen mit Wahrheitswert falsch. Aber eine passende Einsetzung reicht für den Wahrheitswert wahr der Existenzausssage.

c) Als Werte für x sind alle reellen Zahlen zugelassen. Wahrheitswert wahr, denn alle Einsetzungen für x liefern Aussagen mit Wahrheitswert wahr.

d) Wahrheitswert falsch, denn Einsetzung $x = 0$ liefert $0 \not< 0 = 0^2$. Der Wahrheitswert von $x < x^2$ ist falsch sogar für jede Einsetzung mit $0 \leq x \leq 1$. Alle weiteren reellen Zahlen als Einsetzungen für x liefern Aussagen mit Wahrheitswert wahr. Aber eine nicht passende Einsetzung reicht für den Wahrheitswert falsch der Allausssage.

e) Die Wenn-Dann-Aussage ist wahr, da der Wenn-Teil falsch ist. Dazu genügt es sich den zweiten Teil der Und-Aussage anzusehen, der falsch ist und damit die Und-Aussage. Andererseits ist die Dann-Aussage wahr, also die Wenn-Dann-Aussage wahr unabhängig vom Wert des Wenn-Teils.

f) Die Wenn-Dann-Aussage $(0 < 1 \Longrightarrow 2 < 1)$ ist falsch, da der Wenn-Teil wahr ist und der Dann-Teil falsch. Die Aussage über diese Wenn-Dann-Aussage ist damit wahr.

g) Wahrheitswert wahr, denn nach c) ist für alle Einsetzung von x der Dann-Teil wahr. Ob der Wenn-Teil wahr oder falsch ist, ist für den Wahrheitswert der Wenn-Dann-Aussage in diesem Fall ohne Belang.

h) Wahrheitswert falsch, denn Einsetzung $x = 0$ liefert $0 \not< 0 = 0^2$, aber $0 < 1$. Also ist für die Einsetzung $x = 0$ der Wenn-Teil wahr, aber der Dann-Teil falsch. Also ist für diese Einsetzung die Wenn-Dann-Aussage falsch und damit die Allaussage falsch.

AUFGABE 2 :
Welche Schlussfolgerungen sind korrekt?

a) $x < y$
Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt mit $a < b$ auch $a + c < b + c$.
$\Longrightarrow x + z < y + z$.

b) $x < y$ und $c < d$
$\Longrightarrow x < y$

c) Für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt $0 < x + 1$.
$\Longrightarrow 0 < 27 + 1$

d) $9 < 27$
$\Longrightarrow$ Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n^2 < n^3$.

e) $x + 2 < y + 2$
Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt mit $a < b$ auch $a + c < b + c$.
$\Longrightarrow x < y$.

f) $x + 2 \leq y + 2$
Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt mit $a < b$ auch $a + c < b + c$.
$\Longrightarrow x \leq y$.

Lösung:
Wir gehen immer davon aus, dass die Voraussetzungen der Schlussfolgerungen wahr sind. Zusätzlich sei angenommen, dass die Variablen x, y, z zuvor fest, aber beliebig aus dem Bereich $\mathbb{R}$ gewählt sind.

a) Dieser Schluss ist korrekt. (Siehe Vorlesungsfolie Anwendung von Wenn-Dann-Regeln, Folie 1-28) Hier wird die allgemeine Regel aber nicht mit konkreten Werte instantiiert, sondern mit (zuvor im Beweis) fest, aber beliebig gewählten Variablen.

b) Das Weglassen einer Teilaussage einer Und-Aussage ist immer erlaubt.

c) Der Schluss ist korrekt. Wir instantiieren die allgemeine Regel mit einem konkreten Wert.

d) Druckfehler: $n \in \mathbb{N}$ statt $x \in \mathbb{N}$ Der Schluss ist korrekt. Wir haben ein Beispiel, für das die Aussage richtig ist, daher können wir auf die entsprechende Existenzaussage schließen.

e) Dieser Schluss ist korrekt, denn eine Einsetzung von $c = -2$ führt zum gewünschten Ergebnis. Allerdings müssen die Terme weiter ausgewertet werden mit Assoziativgesetzen und Eigenschaften des Operators "$-$".

f) Dieser Schluss ist korrekt. Man beachte, dass $x \leq y$ die Negation der Aussage $x > y$ ist. Damit wird wie im Modus Tollens (Folie 1-26) geschlossen: Es gilt "nicht $y+2 < x+2$" nach Voraussetzung. Der Modus Tollens läßt mit der Wenn-Dann-Aussage der Regel (Einsetzung y für a und x für b sowie 2 für c) den Schluss auf "nicht $y < x$" zu. Diese Aussage ist gleichbedeutend mit $x \leq y$.

AUFGABE 3 :
Ein Alphabet Σ sei gegeben.

a) Geben Sie eine induktive Definition für die Länge von Zeichenreihen Σ^* an, z.B. $|abba| = 4$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass die Länge jeder Zeichenreihe waa (Zeichenreihe w und zweimal a am Ende) eine Länge von mindestens 2 hat.

Lösung:
Wir geben zunächst eine zweite, etwas einfachere Definition von Σ^* als in der Vorlesung. Hier wird unmittelbar Σ^* induktiv definiert, weshalb wir mit der leeren Zeichenreihe als Basiszeichenreihe beginnen müssen:

1. Die leere Zeichenreihe ε ist eine Zeichenreihe in Σ^*.
2. Für eine Zeichenreihe $w \in \Sigma^*$ und einen Buchstaben $s \in \Sigma$ ist ws eine Zeichenreihe in Σ^*.
3. Nur so gebildete Zeichenreihen gehören zu Σ^*.

Die Länge $|w|$ einer Zeichenkette kann induktiv definiert werden analog zur Definition der Menge Σ^*.

1.) Für die leere Zeichenreihe ε gilt $|\varepsilon| := 0$.

2.) Für eine Zeichenreihe $w \in \Sigma^*$ und einen Buchstaben $s \in \Sigma$ ist $|ws| := |w| + 1$.

Folgen wir der Definition der Vorlesung definieren wir

1.) Für jeden Buchstaben $s \in \Sigma$ gilt $|s| := 1$.

2.) Für eine Zeichenreihe $w \in \Sigma^*$ und einen Buchstaben $s \in \Sigma$ ist $|ws| := |w| + 1$.

Für die leere Zeichenreihe definieren wir nach $|\varepsilon| := 0$.
Grundsätzliches:
Eine Allaussage sei gegeben:

Für alle $x \in M$ gilt die Aussage $\mathcal{E}(x)$.

Wenn M eine induktiv definierte Klasse ist wie z.B. die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ oder die Klasse der aussagenlogischen Formeln, so kann die Behauptung mit Induktion gezeigt werden.

1) Induktionsanfang:
Zeige die Aussage $\mathcal{E}$ für die Anfangselemente von M.

2) Induktionsvoraussetzung:
Die Aussage $\mathcal{E}$ gelte für gewisse Elemente von M.

3) Induktionsschluss:
Die Aussage $\mathcal{E}$ wird bewiesen für Elemente von M, die mit Hilfe der Elemente der Induktionsvoraussetzung aufgebaut werden können.

Es muss darauf geachtet werden, dass durch den in der Induktion nachgespielten Konstruktionsprozess von Elementen in M auch **alle** Elemente von M gebildet werden können.

Zurück zur Aufgabe:
Wir verwenden die einfachere erste Definition von Σ^* und zeigen zunächst:
$(*)$ Für alle $w \in \Sigma^*$ gilt $|w| \geq 0$.
Induktionsanfang:
Es gilt nach Definition $|\varepsilon| = 0 \geq 0$.
Induktionsvoraussetzung:
Für ein $w \in \Sigma^*$ gilt $|w| \geq 0$.
Induktionsschluss:
Für jeden Buchstaben $s \in \Sigma$ können wir aus diesem w nach Definition ein neues Wort $ws \in \Sigma^*$ bilden.
z.z. Für jeden Buchstaben $s \in \Sigma$ gilt $|ws| \geq 0$.
Sei also $s \in \Sigma$ fest, aber beliebig gewählt, dann gilt nach Definition $|ws| = |w|+1 \geq_{I.V.} 0+1 \geq 0$.
Da s fest aber beliebig gewählt war, folgt unsere Behauptung aus dem Induktionsschluss.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist damit die Behauptung $(*)$ gezeigt.
Nach Definition gilt nun für ein festes, aber beliebiges $w \in \Sigma^*$
$|waa| = |w| + 1 + 1 \geq 0 + 1 + 1 = 2$.
Damit folgt die Behauptung der Aufgabe.

KORREKTURAUFGABE 4 (10 Punkte) **:**
Das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ sei gegeben.

a) Geben Sie eine induktive Definition für die Menge Σ^* aller Zeichenreihen über dem Alphabet Σ.

b) Geben Sie eine induktive Definition für die Menge $M_{\geq 2}$ aller Zeichenreihen über dem Alphabet Σ, die mindestens zwei Buchstaben lang sind.

c) Geben Sie eine induktive Definition für die Menge M_{dub} aller Zeichenreihen über dem Alphabet Σ, in denen immer zwei gleiche Buchstaben aufeinander folgen, z.B. $aabb$.

d) Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass jede Zeichenreihe aus M_{dub} eine gerade Länge hat.

Lösung:

a) Wir geben wie oben die einfachere Definition von Σ^* an.

   (a) Die leere Zeichenreihe ε ist eine Zeichenreihe in Σ^*.

   (b) Für eine Zeichenreihe $w \in \Sigma^*$ gehören auch die Zeichenreihen wa, wb, wc zu Σ^*.

   (c) Nur so gebildete Zeichenreihen gehören zu Σ^*.

b) (a) Die Zeichenreihen $aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$ sind Zeichenreihen in $M_{\geq 2}$.
   Alternativ: Für $s_1, s_2 \in \Sigma$ sei $s_1 s_2$ eine Zeichenreihe in $M_{\geq 2}$.

   (b) Für eine Zeichenreihe $w \in M_{\geq 2}$ gehören auch die Zeichenreihen wa, wb, wc zu $M_{\geq 2}$.
   Alternativ: Für $s \in \Sigma$ und $w \in M_{\geq 2}$ ist auch ws eine Zeichenreihe in $M_{\geq 2}$.

   (c) Nur so gebildete Zeichenreihen gehören zu $M_{\geq 2}$.

c) (a) Die leere Zeichenreihe ε ist eine Zeichenreihe in M_{dub}.

   (b) Für eine Zeichenreihe $w \in M_{dub}$ gehören auch die Zeichenreihen waa, wbb, wcc zu M_{dub}.

   (c) Nur so gebildete Zeichenreihen gehören zu M_{dub}.

d) Induktionsanfang:
   Es gilt $|\varepsilon| = 0$, also ist die Länge von ε gerade.

   Induktionsvoraussetzung:
   Für eine Zeichenreihe $w \in M_{dub}$ sei $|w|$ gerade.

   Induktionsschluss:
   z.z. $|waa|$, $|wbb|$, $|wcc|$ sind gerade.

   Nach Definition gilt
   $|waa| = |w| + 2$, $|wbb| = |w| + 2$, $|wcc| = |w| + 2$
   Da nach I.V. $|w|$ gerade ist, muss damit auch $|w| + 2$, also $|waa|$, $|wbb|$, $|wcc|$ gerade sein.

   Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist damit die Behauptung bewiesen.

AUFGABE 5 :
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für einen Zeichenvorrat $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_m\}$ von m Buchstaben die Anzahl der Zeichenketten mit genau n Buchstaben genau m^n ist.

Lösung:
Die Behauptung in Zeichen:

$$\forall m \in \mathbb{N}: \ \forall\, \Sigma \text{ mit } \#\Sigma = m: \ \forall n \in \mathbb{N}: \ \#\{w \in \Sigma^* \mid |w| = n\} = m^n$$

Der Wert für m und das Alphabet Σ werden fest, aber beliebig gewählt, die verbleibende Behauptung wird mit Induktion über n gezeigt.
Sei also $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$
und $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_m\}$ ein Alphabet mit m verschiedenen Buchstaben.
Wir zeigen mit Induktion über n die Aussage

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \#\{w \in \Sigma^* \mid |w| = n\} = m^n$$

I.A. Sei $n = 0$.
Das leere Wort ε ist das einzige Wort mit 0 Buchstaben.
$\Rightarrow \#\{w \in \Sigma^* \mid |w| = 0\} = \#\{\varepsilon\} = 1 = m^0$

I.V. Für ein $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ gelte $\#\{w \in \Sigma^* \mid |w| = n\} = m^n$.

I.S. $n \mapsto n + 1$
Vorüberlegung:
Ein Wort w mit $n + 1$ Buchstaben besteht aus einem Anfangswort w'
mit n Buchstaben und einem Endbuchstaben $b \in \Sigma$, also $w = w'b$.
Zwei Wörter w_1 und w_2 sind genau dann gleich, wenn sie buchstabenweise übereinstimmen,
d.h. bei $w_1 := w'_1 b_1$ und $w_2 := w'_2 b_2$ gilt $w_1 = w_2$ genau dann, wenn $w'_1 = w'_2$ und $b_1 = b_2$ gilt.
Die verschiedenen Wörter der Länge $n + 1$ lassen sich also eindeutig
aus den verschiedenen Wörtern der Länge n durch Anhängen der
verschiedenen Buchstaben aus Σ erzeugen.
Es gilt daher:

$$\begin{aligned}\#\{w \in \Sigma^* \mid |w| = n+1\} &= \{w'b \mid w' \in \{w \in \Sigma^* \mid |w| = n\}, b \in \Sigma\} \\ &= m^n \cdot m \qquad \text{(nach I.V.)} \\ &= m^n \cdot m^1 = m^{(n+1)}\end{aligned}$$

Mit Induktion folgt die zu Anfang genannte Behauptung.
Da m und Σ mit $|\Sigma| = m$ fest, aber beliebig gewählt waren, folgt die Behauptung der Aufgabe.

AUFGABE 6 :
Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Lösung:
In dieser Aufgabe war ein Druckfehler: x^i statt x^n.

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 1$ fest, aber beliebig gewählt.
Induktionsanfang: $n = 0$
Es gilt: $\sum_{i=0}^{0} x^i = x^0 = 1 = \frac{1-x}{1-x} = \frac{1-x^1}{1-x}$
Induktionsvoraussetzung:
Für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 0$ gelte: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
Induktionsschluss:
z.z. $\sum_{i=0}^{n+1} x^i = \frac{1-x^{(n+1)+1}}{1-x}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} x^i &= \sum_{i=0}^{n} x^i + x^{n+1} \\
&= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} \quad \text{nach I.V.} \\
&= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{(1-x)x^{n+1}}{1-x} \\
&= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}-x^{(n+1)+1}}{1-x} \\
&= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{(n+1)+1}}{1-x} \\
&= \frac{1-x^{(n+1)+1}}{1-x}
\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung. Da x fast, aber beliebig gewählt war, folgt die Behauptung der Aufgabe.

AUFGABE 7 :

a) Geben Sie eine induktive Definition der Binomialkoeffizienten für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $0 < k \leq n$ an:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$$

b) Es sei weiter definiert $\binom{n}{0} := 1$. Zeigen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der vollständigen Induktion den allgemeinen Binomischen Satz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Lösung:

a) Wir definieren $\binom{n}{k}$ induktiv über $k \in \mathbb{N}$ mit $0 < k \leq n$.

   (a) Für $k = 1$ sei $\binom{n}{k} := \frac{n}{1}$

   (b) Für $0 \leq k < n$ sei $\binom{n}{k+1} := \binom{n}{k} \cdot \frac{n-(k+1)+1}{k+1}$

   Wir sehen, dass eine induktive Definition auf Basis der natürlichen Zahlen nicht unbedingt den ganzen Grundbereich ausschöpfen muss.

   In diesem Fall könnten wir die Definition auch für $k > n$ weiterführen, aber die Binomialkoeffizienten hätten alle den Wert 0.

   Alternative Definition über die Fakultät $n!$

   Wir definieren $n!$ induktiv für $n \in \mathbb{N}$:

   1) Für $n = 0$ sei $0! := 1$.

   2) Für $n \geq 0$ sei $(n+1)! := n! \cdot (n+1)$

   Durch Induktion über k kann mann dann zeigen

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ \forall k \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 \leq k \leq n: \ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

   Diese Eigenschaft hätten wir auch zur Definition benutzen können.

b) Für den Beweis dieser Behauptung benötigt man zwei Hilfssätze, die hier nicht gezeigt werden sollen:

   - Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{n}{n} = 1$.

     Motivierbar ist die Aussage durch: $\binom{n}{n} = \frac{n \cdot \ldots \cdot 1}{1 \cdot \ldots \cdot n} = 1$.

   - Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $0 < k < n$ $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

     Motivierbar ist diese Aussage durch:
     $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
     $= \frac{n \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)+1)}{1 \cdot \ldots \cdot (k-1)} + \frac{n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot \ldots \cdot k} = \frac{n \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)+1) \cdot k}{1 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k} + \frac{n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot \ldots \cdot k}$
     $= \frac{n \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)+1) \cdot k + n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot \ldots \cdot k} = \frac{(n \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)+1))(k+n-k+1)}{1 \cdot \ldots \cdot k} \frac{(n+1) \cdot (n \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)+1))}{1 \cdot \ldots \cdot k}$
     $= \binom{n+1}{k}$

   Einfach beweisbar werden beide Aussagen mit der alternative Definition der Binomialkoeffizienten durch $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

   Nun zur eigentlichen Behauptung:

   Seien $x, y \in \mathbb{R}$ fest, aber beliebig gewählt.
   Wir führen eine Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

   Induktionsanfang: $n = 0$

   Es gilt: $(x+y)^0 =_{Def.} 1 = \binom{0}{0} x^0 y^{0-0} = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{0-k}$

Induktionsvoraussetzung:

Für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 0$ gilt: $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Induktionsschluss:

z.z. $(x+y)^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{(n+1)-k}$

$$\begin{aligned}
& (x+y)^{n+1} \\
= \;& (x+y)^n \cdot (x+y) \\
= \;& (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}) \cdot (x+y) \;\text{ nach I.V.} \\
= \;& x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
= \;& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
= \;& \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \;\text{ Indextransformation} \\
= \;& \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \binom{n}{(n+1)-1} x^{n+1} y^{n-(n+1)+1} + \binom{n}{0} x^0 y^{n-0+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
= \;& \binom{n}{0} x^0 y^{n-0+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{(n+1)-k} + \binom{n}{n} x^{n+1} y^{n-n} \\
= \;& \binom{n+1}{0} x^0 y^{n-0+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^{n-n} \;\text{ Def. } \tbinom{n}{k} \text{ und Hilfssatz} \\
= \;& \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{(n+1)-k}
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Da $x, y \in \mathbb{R}$ fest, aber beliebig gewählt waren, folgt die Aussage

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \; \forall n \in \mathbb{N}: \; (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

AUFGABE 8 :
Betrachten Sie die Menge $\mathbb{N}_+$ der natürlichen Zahlen ohne 0, d.h. $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, ...\}$. Für Werte $x, y \in \mathbb{N}_+$ bezeichnet der $ggT(x, y)$ den größten gemeinsamen Teiler von x und y. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathbb{N}_+ = \{ggT(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}_+\}$$

Lösung:
Jeder ggT ist laut Definition von ggT eine natürliche Zahl. Also gilt $\{ggT(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}_+\} \subseteq \mathbb{N}_+$
Für jede natürliche Zahl x gilt $x = ggT(x, x)$. Damit folgt $\mathbb{N}_+ \subseteq \{ggT(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}_+\}$.
Aus beiden Teilaussagen zusammen folgt die Mengengleichheit.
WICHTIG:
Zum Beweis einer Mengengleichheit ist zu zeigen, dass jedes Element der einen Menge auch Element der anderen ist. Es sind also zwei Nachweise nötig!
Hier noch eine zusätzliche Induktion, die ganz brauchbar ist:

AUFGABE:
Betrachten Sie den folgenden Beweis durch Induktion:

Behauptung: Wenn auf einem Parkplatz ein rotes Auto parkt, dann parken dort nur rote Autos.

Beweis: Induktion über die Anzahl der Autos n.

> Induktionsanfang: $n = 1$
> Auf dem Parkplatz steht nur ein Auto und das ist nach Voraussetzung rot.
>
> Induktionsvoraussetzung:
> Steht unter n Autos auf einem Parkplatz ein rotes, so sind alle rot.
>
> Induktionsschritt: $n \mapsto n + 1$
> Auf einem Parkplatz stehen $n+1$ Fahrzeuge, darunter ein rotes. Wir fahren nun ein Fahrzeug vom Parkplatz herunter und zwar nicht das, von dem wir wissen, dass es rot ist. Nach Induktionsvoraussetzung sind nun die restlichen n Fahrzeuge auf dem Parkplatz rot. Nun fahren wir eines der roten Autos vom Parkplatz herunter und das eine andere wieder auf den Parkplatz zurück. Wieder sind nach Induktionsvoraussetzung alle n Fahrzeuge auf dem Parkplatz rot. Wir fahren nun das eine rote Auto auf den Parkplatz zurück und haben insgesamt $n + 1$ rote Autos auf dem Parkplatz.

Wo liegt der Fehler in diesem Beweis?

Lösung:
Im Induktionsschritt: Wenn im zweiten Teil ein rotes Auto vom Platz gefahren wird und das zuvor entfernte zurück, wird anschließend nicht mehr geprüft, ob die Induktionsvoraussetzung auch gilt. Im Falle $n = 1$ haben wir nämlich das einzige andere Auto vom Parkplatz gefahren und nur das eine Auto mit der unbekannten Farbe steht wieder da. Auf dem Parkplatz steht also kein Auto, von dem wir wissen, dass es rot ist. Die Induktionsvoraussetzung ist also NICHT anwendbar.
Alternativ kann man argumentieren, dass der Induktionsanfang falsch ist. Denn wenn man dort den Fall $n = 2$ gezeigt hätte, wäre der Beweis insgesamt korrekt.