

Übungen zur Vorlesung  
**Modellierung**  
WS 2003/2004  
Blatt 5

**AUFGABE 1 :**

Das Wochenende hat Lisa gern für sich. Doch jeden der fünf Werkstage verbringt sie mit genau einem ihrer drei Freunde. Wen Lisa nächste Woche wann sieht, hat sie so festgelegt:

1. Sehe ich am Donnerstag Andreas oder Jörg, so treffe ich Philipp am Dienstag.
2. Halte ich am Mittwoch Jörg in den Armen, so werde ich den Freitag entweder Philipp oder Jörg widmen.
3. Treffe ich Philipp am Donnerstag nicht, dann bin ich auch am Mittwoch nicht bei ihm.
4. Sehe ich Philipp am Montag, dann werde ich, sofern ich mit Andreas am Dienstag kein Rendezvous habe, Philipp auch am Donnerstag treffen.
5. Schließe ich Dienstag Andreas in die Arme, so soll Jörg, wenn nicht schon am Mittwoch, dann am Donnerstag mein Liebhaber sein.
6. Nur wenn Andreas am Freitag an der Reihe ist, schenke ich Jörg am Montag meine Gunst.
7. Falls ich mit Andreas weder für Montag noch für Dienstag verabredet bin, werde ich ihn auch am Mittwoch nicht sehen.

Formalisieren Sie die Regeln mittels Aussagenlogik.

**AUFGABE 2 :**

Beweisen oder widerlegen Sie:

1. Zu jeder erfüllbaren Formel gibt es eine erfüllende Bewertung, die mindestens ein Atom der Formel mit 0 bewertet.
2. Zu jeder tautologischen Formel gibt es eine erfüllende Bewertung, die mindestens ein Atom der Formel mit 1 bewertet.
3. Jede Teilformel einer erfüllbaren Formel ist selbst wieder eine erfüllbare Formel.
4. Jede Teilformel einer tautologischen Formel ist selbst wieder eine tautologische Formel.
5. Jede Teilformel einer tautologischen Formel ist selbst eine erfüllbare Formel.
6. Enthält eine Formel eine widerspruchsvolle Teilformel, so ist sie insgesamt auch widerspruchsvoll.

7. Zu jeder widerspruchsvollen Formel gibt es eine Bewertung, die eine Teilformel mit 1 bewertet.
8. Zu jeder erfüllbaren Formel gibt es eine logisch äquivalente Formel, die falsifizierbar ist.
9. Zu jeder Formel gibt es eine logisch äquivalente Formel, die mindestens ein Atom enthält, das in der ersten Formel nicht vorkommt.

### AUFGABE 3 :

$\alpha$  und  $\beta$  seien aussagenlogische Formeln. Beweisen Sie die folgenden Äquivalenzen:

a)  $\alpha \models \beta \Leftrightarrow \alpha \wedge \neg\beta$  widerspruchsvoll

b)  $\alpha \models \beta \Leftrightarrow \alpha \approx \alpha \wedge \beta$

### AUFGABE 4 :

Nachdem Hänsel und Gretel die Hexe in den Ofen gestoßen haben, wollen sie sich über das Knusperhäuschen hermachen. Doch wie allgemein bekannt ist, muss man beim Verspeisen eines solchen Hauses sehr vorsichtig sein, da diese Häuser zur Instabilität neigen. Die beiden Kinder wenden sich zunächst einer Wand zu, die aus drei Lebkuchen besteht. Da Hänsel erfolgreich Knusperhäuschenarchitektur studiert hat, erkennt er, dass folgende Regeln aus Sicherheitsgründen unbedingt einzuhalten sind:

1. Man darf höchstens einen der beiden ersten Lebkuchen entfernen.
2. Wenn man den dritten entfernt, muss man auch den zweiten entfernen.
3. Wenn man den zweiten entfernt und den ersten nicht, dann darf man den dritten nicht entfernen.

Da Gretel in Logik aufgepasst hat, weiß sie, dass man vom dritten Lebkuchen besser die Finger lässt.

- a) Formalisieren Sie die drei Regeln als aussagenlogische Formeln  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ . Verwenden Sie hierbei folgende Abkürzungen für die Teilaussagen:

A = „ersten Lebkuchen entfernen“

B = „zweiten Lebkuchen entfernen“

C = „dritten Lebkuchen entfernen“

- b) Zeigen Sie, dass Gretels Wissen eine semantische Folgerung aus den drei Regeln ist.

**KORREKTURAUFGABE 5** (4 Punkte) :

Tragen Sie in die Felder der nachfolgenden Tabelle ein, ob aus der Formel in der aktuellen Zeile die Formel in der aktuellen Spalte semantisch folgt. Verwenden Sie die Einträge

$\models$  für semantische Folgerung (Zeilenformel  $\models$  Spaltenformel) und

$\not\models$  für keine Folgerung (Zeilenformel  $\not\models$  Spaltenformel).

Leere Felder gelten als unbearbeitet. Jeder falsche Eintrag bewirkt einen Abzug von 0.5 Punkten von den erreichten Punkten in dieser Aufgabe bis hin zu 0 Punkten (keine negativen Punkte).

	$Q \rightarrow \neg P$	$P \vee \neg Q$	$P \vee Q$	$\neg(Q \wedge \neg Q)$
$P$				
$P \rightarrow \neg Q$				
$P \wedge \neg P$				
$P \wedge Q$				
$\neg(P \vee Q)$				

**KORREKTURAUFGABE 6** (6 Punkte) :

Bringen Sie folgende aussagenlogische Formeln zuerst in Negationsnormalform, dann in konjunktive Normalform. Geben Sie Zwischenschritte bei der Umformung an und benennen Sie die angewandten Umformungsgesetze. Kennzeichnen Sie die NNF und die KNF.

a)  $\alpha = \neg((A \rightarrow (B \wedge \neg C)) \rightarrow \neg(\neg A \vee (B \wedge C)))$

b)  $\beta = (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$

c)  $\gamma = (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$