Korrekturaufgabe 14:

Überprüfen Sie die folgenden 2-stelligen Relation auf die Eigenschaften Symmetrie, Asymmetrie, Antisymmetrie, Reflexivität, Irreflexivität, Transitivität und Alternativität. Geben Sie außerdem an, ob es sich bei den Relationen um Äquivalenz- oder Ordnungsrelationen handelt.

1. „$\subseteq$" $\subseteq \wp(M) \times \wp(M)$ (M beliebige Menge) mit $A \subseteq B \Leftrightarrow A$ ist Teilmenge von B
   - reflexiv, da jede Menge Teilmenge von sich selbst ist
   - nicht irreflexiv, da reflexiv
   - nicht symmetrisch, da $A \subseteq B$ aber daraus nicht für alle $x \in M$ folgt, dass $B \subseteq A$,da auch $A \neq B$ gelten kann
   - nicht asymmetrisch, da $A = B$ falls $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.
   - antisymmetrisch, da wenn $A = B$ ist, die Voraussetzung und die Folgerung der Definition wahr ist. Wenn die Voraussetzung falsch ist, folgt daraus trotzdem eine wahre Folgerung
   - transitiv, da wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, dann auch $A \subseteq C$ gelten muss
   - Da die Relation reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist, ist es eine Halbordnung und somit eine Ordnungsrelation.

2. „$|$" $\subseteq \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$ mit $a \mid b \Leftrightarrow a$ teilt b ($a, b \in \mathbb{N}_+$)
   - reflexiv, da sich jede Zahl selbst teilt
   - nicht irreflexiv, da reflexiv
   - nicht symmetrisch, da $1 \mid 3$ aber nicht $3 \mid 1$
   - nicht asymmetrisch, da jede Zahl sich selbst teilt
   - antisymmetrisch, da jede Zahl sich selbst teilt
   - transitiv, da $a \mid b \vee b \mid c \Rightarrow a \mid c$
   - nicht alternativ, da z.B. für $a = 5$, $b = 3$ nicht gilt $a \mid b$ oder $b \mid a$
   - Da die Relation reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist, ist es eine Halbordnung und somit eine Ordnungsrelation.

3. $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\} \subseteq \{1,2,3,4\}^2$

R	1	2	3	4
1	+			
2	+	+		
3	+	+	+	
4	+	+	+	+

   - reflexiv, da Diagonale mit +-Zeichen gefüllt
   - nicht irreflexiv, da reflexiv
   - nicht symmetrisch, da keine Spiegelung der +-Zeichen an der Diagonalen
   - nicht asymmetrisch, da die Diagonale nicht leer ist
   - antisymmetrisch, da rechts der Diagonalen keine +-Zeichen vorhanden sind
   - transitiv, da folgende Aussagen wahr sind:
     $(1,2) \wedge (2,3) \Rightarrow (1,3)$
     $(1,3) \wedge (3,4) \Rightarrow (1,4)$
     $(2,3) \wedge (3,4) \Rightarrow (2,4)$
   - alternativ, da alle Felder links der Diagonalen gefüllt und alle Felder rechts der Diagonalen leer sind
   - Da die Relation reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist, ist es eine Halbordnung und somit eine Ordnungsrelation.