Dr. Theo Lettmann

Paderborn, den 17. Oktober 2003
Abgabe 27. Oktober 2003

Übungen zur Vorlesung
Modellierung
WS 2003/2004
Blatt 1

Organisatorisches: Die Lösungen der Übungsaufgaben sind bis 11:15h am Abgabetermin in die Kästen im D3-Flur einzuwerfen. Die Lösung muss die Namen, Matrikelnummern und **Übungsgruppennummer** derjenigen enthalten, die die Aufgaben gelöst haben (maximal 4 Personen). Wer seinen Namen leserlich schreibt, kann die Matrikelnummer weglassen. Korrigiert werden nur Aufgaben, die als Korrekturaufgaben gekennzeichnet sind.

AUFGABE 1 :
Welche Aussagen sind wahr, welche falsch?

a) Für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt $0 < x + 1$.

b) Es gibt ein $x \in \mathbb{N}$ mit $n \leq -n^2$.

c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x < x + 1$.

d) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x < x^2$.

e) Wenn $12345 \cdot 98765 < 12349876$ und $(-4)^2 \leq 0$, dann $\pi^2 > 9$.

f) Die Aussage $(0 < 1 \Longrightarrow 2 < 1)$ ist falsch.

g) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $(x < x^2 \Longrightarrow x < x + 1)$.

h) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $(x < x + 1 \Longrightarrow x < x^2)$.

AUFGABE 2 :
Welche Schlussfolgerungen sind korrekt?

a) $x < y$
Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt mit $a < b$ auch $a + c < b + c$.
$\Longrightarrow x + z < y + z$.

b) $x < y$ und $c < d$
$\Longrightarrow x < y$

c) Für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt $0 < x + 1$.
$\Longrightarrow 0 < 27 + 1$

d) $9 < 27$
$\Longrightarrow$ Es gibt ein $x \in \mathbb{N}$ mit $n^2 < n^3$.

e) $x + 2 < y + 2$
Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt mit $a < b$ auch $a + c < b + c$.
$\Longrightarrow x < y$.

f) $x + 2 \leq y + 2$
Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt mit $a < b$ auch $a + c < b + c$.
$\Longrightarrow x \leq y$.

AUFGABE 3 :
Ein Alphabet Σ sei gegeben.

a) Geben Sie eine induktive Definition für die Länge von Zeichenreihen Σ^* an, z.B. $|abba| = 4$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass die Länge jeder Zeichenreihe waa (Zeichenreihe w und zweimal a am Ende) eine Länge von mindestens 2 hat.

KORREKTURAUFGABE 4 (10 Punkte) **:**
Das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ sei gegeben.

a) Geben Sie eine induktive Definition für die Menge Σ^* aller Zeichenreihen über dem Alphabet Σ.

b) Geben Sie eine induktive Definition für die Menge $M_{\geq 2}$ aller Zeichenreihen über dem Alphabet Σ, die mindestens zwei Buchstaben lang sind.

c) Geben Sie eine induktive Definition für die Menge M_{dub} aller Zeichenreihen über dem Alphabet Σ, in denen immer zwei gleiche Buchstaben aufeinanderfolgen, z.B. $aabb$.

d) Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass jede Zeichenreihe aus M_{dub} eine gerade Länge hat.

AUFGABE 5 :
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für einen Zeichenvorrat $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_m\}$ von m Buchstaben die Anzahl der Zeichenketten mit genau n Buchstaben genau m^n ist.

AUFGABE 6 :
Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

AUFGABE 7 :

a) Geben Sie eine induktive Definition der Binomialkoeffizienten für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $0 < k \leq n$ an:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$$

b) Es sei weiter definiert $\binom{n}{0} := 1$. Zeigen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der vollständigen Induktion den allgemeinen Binomischen Satz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

AUFGABE 8 :

Betrachten Sie die Menge $\mathbb{N}_+$ der natürlichen Zahlen ohne 0, d.h. $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, ...\}$. Für Werte $x, y \in \mathbb{N}_+$ bezeichnet der $ggT(x, y)$ den größten gemeinsamen Teiler von x und y. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathbb{N}_+ = \{ggT(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}_+\}$$