Klausurvorbereitung und Musterlösung zu Mathematik für Informatiker I, WS 2003/04

JOACHIM VON ZUR GATHEN, OLAF MÜLLER-TOFALL, MICHAEL NÜSKEN
Lösungen: KATHRIN TOFALL

Aufgabe 1 (Paderborner Allerlei I).

Kreuze bei folgenden Fragen jeweils die richtige(n) Antwort(en) an. Es können auch mehrere Antworten zutreffen. (Eine richtige Lösung gibt jeweils einen Punkt, eine falsche Lösung gibt einen Minuspunkt. Keine Antwort gibt keine Punkte.)

(i) Für reelle Zahlen a, b gilt $|a - ib| = a^2 + b^2$. ☐ Wahr ☒ Falsch

Lösung. $|a - ib| = \sqrt{a^2 + b^2} \overset{\text{i.A.}}{\neq} a^2 + b^2$. ○

(ii) Die Formel $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\quad 1/n < \varepsilon$ ist wahr. ☒ Wahr ☐ Falsch

Lösung. Es existiert immer eine natürliche Zahl, deren Inverses in $\mathbb{Q}_{>0}$ beliebig nah an 0 herankommt. (Das ist das archimedische Axiom.) ○

(iii) Für $a, b, d \in \mathbb{Z}$ gilt: es gibt genau dann $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $sa + tb = d$, wenn $\text{ggT}(a, b) \mid d$. ☒ Wahr ☐ Falsch

Lösung. Wenn diese s und t existieren, dann teilt auch das d den ggT. Anderherum existieren diese s und t dann, wenn der ggT das d teilt. ○

(iv) Für $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt: aus $a^2 = 5b^2$ folgt $5 \mid a$. ☒ Wahr ☐ Falsch

Lösung. Das ist wahr, weil 5 *prim* ist: Sei nämlich $a^2 = 5b^2$ und zerlege a und b in Primfaktoren. Dann steht auf der rechten Seite eine Primfaktorzerlegung, in der eine 5 vorkommt. Also muss wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung auch in der Zerlegung links eine 5 auftreten. Und die kann dort nur hinkommen, wenn sie schon in a vorkommt, also gilt $5 \mid a$.

Nebenbemerkung: Letztendlich kann es eine Darstellung mit $a^2 = 5b^2$ für $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$ nicht geben, da $\sqrt{5} \notin \mathbb{Z}$. Aber $a = 0$ und $b = 0$ erfüllt die Voraussetzung sehr wohl; dann ist aber auch die Folgerung richtig, $5 \mid 0$. ○

(v) Die binär dargestellte Zahl $(101\,1010\,1110\,1101\,0110\,1101\,0110\,1010)_2$ ist gerade. ☒ Wahr ☐ Falsch

Lösung. Die Einerstelle der Binärzahl ist nicht besetzt, somit muss diese durch zwei teilbar und damit gerade sein. ○

Aufgabe 2 (Schaltkreise).

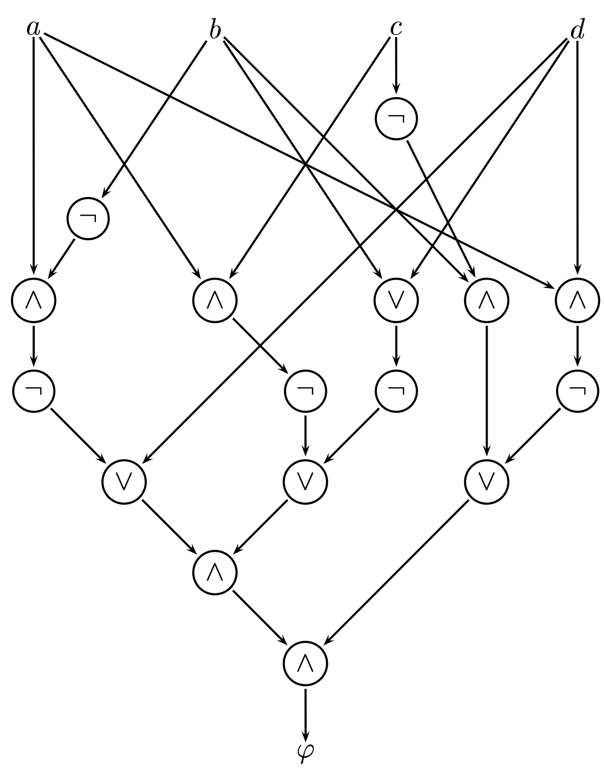
Sei φ die Formel $((a \wedge \neg b) \Rightarrow d) \wedge ((a \wedge d) \Rightarrow (b \wedge \neg c)) \wedge ((a \wedge c) \Rightarrow \neg(b \vee d))$.

(i) Zeichne einen Schaltkreis für die Formel φ, der nur die Gatter $\wedge$, $\vee$, $\neg$ verwendet.

Lösung. Da nur die drei Gatter $\wedge, \vee, \neg$ verwendet werden dürfen, müssen wir schon etwas an der Formel arbeiten:

$$((a \wedge \neg b) \Rightarrow d) \wedge ((a \wedge d) \Rightarrow (b \wedge \neg c)) \wedge ((a \wedge c) \Rightarrow \neg(b \vee d)),$$
$$(\neg(a \wedge \neg b) \vee d) \wedge (\neg(a \wedge d) \vee (b \wedge \neg c)) \wedge (\neg(a \wedge c) \vee \neg(b \vee d)).$$

Der entsprechende Schaltkreis ist ein Monstrum:



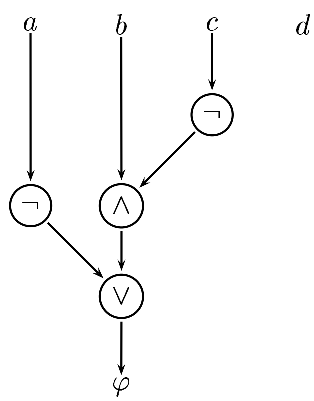
○

(ii) Vereinfache φ.

Lösung. Durch Vereinfachen der Formel erhalten wir:

$$
\begin{gathered}
((a \wedge \neg b) \Rightarrow d) \wedge ((a \wedge d) \Rightarrow (b \wedge \neg c)) \wedge ((a \wedge c) \Rightarrow \neg(b \vee d)), \\
(\neg(a \wedge \neg b) \vee d) \wedge (\neg(a \wedge d) \vee (b \wedge \neg c)) \wedge (\neg(a \wedge c) \vee \neg(b \vee d)), \\
(\neg a \vee b \vee d) \wedge (\neg a \vee \neg d \vee (b \wedge \neg c)) \wedge (\neg a \vee \neg c \vee (\neg b \wedge \neg d)), \\
\neg a \vee \big((b \vee d) \wedge (\neg d \vee (b \wedge \neg c)) \wedge (\neg c \vee (\neg b \wedge \neg d))\big), \\
\neg a \vee ((b \vee d) \wedge (\neg d \vee b) \wedge (\neg d \vee \neg c) \wedge (\neg c \vee \neg b) \wedge (\neg c \vee \neg d)), \\
\neg a \vee ((b \vee (d \wedge \neg d)) \wedge (\neg c \vee (\neg d \wedge \neg b))), \\
\neg a \vee (b \wedge (\neg c \vee (\neg d \wedge \neg b))), \\
\neg a \vee (b \wedge ((\neg c \vee \neg d) \wedge (\neg c \vee \neg b))), \\
\neg a \vee ((b \wedge (\neg c \vee \neg d)) \wedge (b \wedge (\neg c \vee \neg b))), \\
\neg a \vee ((b \wedge (\neg c \vee \neg d)) \wedge (b \wedge \neg c)), \\
\neg a \vee (b \wedge \neg c).
\end{gathered}
$$

Der entsprechende Schaltkreis ist viel schöner als der in (i):



Aufgabe 3 (Wahrheitstafeln).

(i) Erstelle eine Wahrheitstafel für die Formel $b \Rightarrow \neg((a \Rightarrow b) \wedge a) \vee c$.

Lösung. Wir können als einfachsten Ansatz folgende Wahrheitstabelle aufstellen:

a	b	c	$(a \Rightarrow b)$	$(a \Rightarrow b) \wedge a$	$\neg((a \Rightarrow b) \wedge a) \vee c$	$b \Rightarrow \neg((a \Rightarrow b) \wedge a) \vee c$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Das geht aber auch schneller, wenn wir vor dem Aufstellen der Wahrheitstabelle die Formel vereinfachen:

$$
\begin{gathered}
b \Rightarrow \neg((a \Rightarrow b) \wedge a) \vee c, \\
b \Rightarrow \neg((\neg a \vee b) \wedge a) \vee c, \\
b \Rightarrow \neg((\neg a \wedge a) \vee (b \wedge a)) \vee c, \\
b \Rightarrow \neg(a \wedge b) \vee c, \\
b \Rightarrow (\neg a \vee \neg b \vee c), \\
\neg b \vee \neg a \vee \neg b \vee c, \\
\neg a \vee \neg b \vee c.
\end{gathered}
$$

Dann ist die Wahrheitstabelle:

a	b	c	$\neg a \vee \neg b \vee c$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

○

(ii) Finde eine Formel für die durch die folgende Wahrheitstafel dargestellte Funktion:

a	b	c	φ
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Lösung. Hier kann man (muss man aber nicht!) aus der Tabelle schon sehen, dass die Formel $a \oplus c$ nur an der Stelle $a = b = c = 1$ versagt. Durch Hinzufügen der Klausel $b \wedge c$ erhält man so schnell eine gültige Formel für φ:

$$\varphi = (a \oplus c) \vee (b \wedge c).$$

Man kann die Lösung natürlich auch anders erhalten. Aus der Tabelle können wir folgende Formel ablesen:

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \neg\big((\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c)\big) \\
&\quad \text{oder so} \\
\varphi &= \neg(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \wedge \neg(\neg a \wedge b \wedge \neg c) \wedge \neg(a \wedge \neg b \wedge c).
\end{aligned}
$$

Wir können folgende Umformungen durchführen:

$$\begin{gathered}
\neg(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \wedge \neg(\neg a \wedge b \wedge \neg c) \wedge \neg(a \wedge \neg b \wedge c), \\
(a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c), \\
((a \vee c) \vee b) \wedge ((a \vee c) \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c), \\
((a \vee c) \vee (b \wedge \neg b)) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c), \\
(a \vee c) \wedge ((\neg a \vee \neg c) \vee b), \\
((a \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg c)) \vee ((a \vee c) \wedge b), \\
(a \oplus c) \vee (a \wedge b) \vee (b \wedge c).
\end{gathered}$$

Das entspricht nicht der „gesehenen" Lösung. Man kann aber eine der beiden $\wedge$-Klauseln der letzten Zeile weglassen, da sie wirklich nur für die letzte Zeile der Wahrheitstafel wichtig sind und dort gilt sowohl $a \wedge b$ als auch $b \wedge c$. Beide Klauseln ändern nichts an den Wahrheitswerten für die andern Zeilen! ○

Aufgabe 4 (Induktion).

Sei $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$. Beweise

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \qquad \begin{bmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}^2.$$

Tipps: Multipliziere mit $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]^2$. Prüfe, ob $\left[\begin{smallmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{smallmatrix}\right]$ mit $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ kommutiert.

Lösung. Induktionsanfang $n = 1$:

$$\begin{bmatrix} F_{1-1} & F_1 \\ F_1 & F_{1+1} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} F_0 & F_1 \\ F_1 & F_2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2 & F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2\cdot 1-1} & F_{2\cdot 1} \\ F_{2\cdot 1} & F_{2\cdot 1+1} \end{bmatrix}.$$

Für den Induktionsschritt brauchen wir jetzt noch, dass

$$(*) \qquad \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}$$

gilt. Wir überprüfen das einfach mal:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} + F_n \\ F_{n+1} & F_n + F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n-1} + F_n & F_n + F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Also gilt $(*)$ und die beiden Matrizen sind bei einer Multiplikation vertauschbar.

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} F_{n+1-1} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n++1+1} \end{bmatrix}^2 &= \begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix}^2 = \left(\begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^2 \\
&= \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&\overset{(*)}{=} \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 \\
&\overset{\text{IV}}{=} \begin{bmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_{2n-1} + F_{2n} & F_{2n-1} + 2 \cdot F_{2n} \\ F_{2n} + F_{2n+1} & F_{2n} + 2 \cdot F_{2n+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_{2n+1} & F_{2n+1} + F_{2n} \\ F_{2n+2} & F_{2n+2} + F_{2n+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_{2n+1} & F_{2n+2} \\ F_{2n+2} & F_{2n+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2(n+1)-1} & F_{2(n+1)} \\ F_{2(n+1)} & F_{2(n+1)+1} \end{bmatrix}. \qquad \bigcirc
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (Induktion).

Sei $T_0 = 1$, $T_{n+1} = (n+1)T_n + n$. Zeige

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad T_n = 2n! - 1.$$

Lösung. Induktionsanfang $n = 0$:

$$2 \cdot 0! - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = T_0.$$

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= (n+1) \cdot T_n + n \\
&\overset{\text{IV}}{=} (n+1) \cdot (2 \cdot n! - 1) + n \\
&= 2 \cdot (n+1) \cdot n! - (n+1) + n \\
&= 2 \cdot (n+1)! - 1. \qquad \bigcirc
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (ggT).

Berechne den größten gemeinsamen Teiler g von $a = 166\,804$ und $b = 140\,029$ und stelle ihn in der Form $g = sa + tb$ dar.

Lösung. Diese Aufgabe wird natürlich mit dem EEA oder SEEA gelöst. Hier nur die Tabelle für den EEA:

i	r_i	q_i	s_i	t_i	Kommentar
0	166 804	–	1	0	
1	140 029	1	0	1	
2	26 775	5	1	-1	$166\,804 = 1 \cdot 140\,029 + 26\,775$
3	6 154	4	-5	6	$140\,029 = 5 \cdot 26\,775 + 6\,154$
4	2 159	2	21	-25	$26\,775 = 4 \cdot 6\,154 + 2\,159$
5	1 836	1	-47	56	$6\,154 = 2 \cdot 2\,159 + 1\,836$
6	323	5	68	-81	$2\,159 = 1 \cdot 1\,836 + 323$
7	221	1	-387	461	$1\,836 = 5 \cdot 323 + 221$
8	102	2	455	-542	$323 = 1 \cdot 221 + 102$
9	**17**	6	$\mathbf{-1\,297}$	**1 545**	$221 = 2 \cdot 102 + 17$
10	0	–	8 237	$-9\,812$	$102 = 6 \cdot 17 + 0$

Also ist der ggT von a und b darstellbar als:

$$\begin{aligned} 17 &= sa + tb \\ &= -1\,297 \cdot 166\,804 + 1\,545 \cdot 140\,029. \end{aligned}$$

Hier waren 9 Divisionen mit Rest auszuführen. Wenn man den SEEA benutzt hat, erhält man folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} -17 &= sa + tb \\ &= 1\,297 \cdot 166\,804 + (-1\,545) \cdot 140\,029 \end{aligned}$$

Da aber über $\mathbb{Z}$ der ggT positiv sein sollte, multiplizieren wir das Ganze mit -1 und erhalten die gleiche Darstellung wie durch den EEA. Hier waren nur 7 Divisionen mit Rest nötig. ○

Aufgabe 7 (Simultane Kongruenzen).

Bestimme alle Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} x &\equiv 227 \bmod 365, \\ x &\equiv 26 \bmod 31. \end{aligned}$$

Lösung. Hier berechnen wir zunächst mal den ggT von 31 und 365 mit Hilfe des EEA:

i	r_i	q_i	s_i	t_i	Kommentar
0	365	–	1	0	
1	31	11	0	1	
2	24	1	1	-11	$365 = 11 \cdot 31 + 24$
3	7	3	-1	12	$31 = 1 \cdot 24 + 7$
4	3	2	4	-47	$24 = 3 \cdot 7 + 3$
5	**1**	3	$\mathbf{-9}$	**106**	$7 = 2 \cdot 3 + 1$
6	0	–	31	-365	$3 = 3 \cdot 1 + 0$

Wir wissen also

$$1 = -9 \cdot 365 + 106 \cdot 31.$$

Daraus lassen sich jetzt u und v errechnen:

$$u = -9 \cdot 365 = -3285 \text{ und } v = 106 \cdot 31 = 3286.$$

Es gilt also offensichtlich:

$$\begin{aligned} u &\equiv 1 \bmod 31, & v &\equiv 0 \bmod 31, \\ u &\equiv 0 \bmod 365, & v &\equiv 1 \bmod 365. \end{aligned}$$

Dann können wir das gesuchte x so darstellen:

$$\begin{aligned} x &\equiv 227v + 26u \\ &\equiv 4242 \bmod \underbrace{31 \cdot 365}_{11315}. \end{aligned}$$

○

Aufgabe 8 (Modular Potenzieren).

Berechne (schlau)

$$2^{100\,000\,000} \operatorname{rem} 1523.$$

Hilfe: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass 1523 prim ist.

Lösung. Da 1523 prim ist, wissen wir:

- $2^{\varphi(1523)} \equiv 1 \bmod 1523$ und
- $\varphi(1523) = 1522$.

$100\,000\,000 = 65\,703 \cdot 1\,522 + 34$, also $100\,000\,000 \equiv 34 = 32 + 2 \bmod 1522$. Wir müssen also nur noch 2^{34} rem 1523 berechnen:

$$\begin{aligned} 2^2 &= 4 \bmod 1523, \\ 2^4 &= 4^2 = 16 \bmod 1523, \\ 2^8 &= 16^2 = 256 \bmod 1523, \\ 2^{16} &= 256^2 = 65536 \equiv 47 \bmod 1523, \\ 2^{32} &\equiv 47^2 = 2209 \equiv 686 \bmod 1523. \end{aligned}$$

Also gilt

$$2^{34} = 2^{32+2} = 2^{32} \cdot 2^2 \equiv 686 \cdot 4 = 2744 \equiv 1221 \bmod 1523.$$

○

Im Folgenden werden die Gleichungssysteme alle nach „Schema F“ gelöst. Man kann in den meisten Fällen geschickter vorgehen.

Aufgabe 9 (Gleichungssysteme über $\mathbb{Q}$).

Betrachte das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1\cdot x_1+4\cdot x_2+0\cdot x_3+\quad 3\cdot x_4 &=1\\ 0\cdot x_1+3\cdot x_2+1\cdot x_3+\quad 0\cdot x_4 &=1\\ -4\cdot x_1+1\cdot x_2+0\cdot x_3+\quad 0\cdot x_4 &=1\\ 1\cdot x_1+0\cdot x_2+1\cdot x_3+(-2)\cdot x_4 &=1 \end{aligned}$$

über $\mathbb{Q}$.

(i) Bestimme die erweiterte Koeffizientenmatrix.

Lösung.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1\\ -4 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

(ii) Wende das Gauß-Jordan-Verfahren darauf an.

Lösung.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1\\ -4 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ +4\cdot \mathrm{I}\\ -1\cdot \mathrm{I} \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 17 & 0 & 12 & 5\\ 0 & -4 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot\frac{1}{3} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 17 & 0 & 12 & 5\\ 0 & -4 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -17\cdot \mathrm{II}\\ +4\cdot \mathrm{II} \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & -\frac{17}{3} & 12 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & -5 & \frac{4}{3} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot\left(-\frac{3}{17}\right)\\ \cdot\frac{3}{7}\ (**) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{36}{17} & \frac{6}{51}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{15}{7} & \frac{4}{7} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ -1\cdot \mathrm{III} \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{36}{17} & \frac{6}{51}\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{119} & \frac{54}{119} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot\left(-\frac{119}{3}\right) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{36}{17} & \frac{6}{51}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -18 \end{array}\right] \begin{array}{l} -3\cdot \mathrm{IV}\\ \\ +\frac{36}{17}\cdot \mathrm{IV}\\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 & 55\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -38\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -18 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{3}\cdot \mathrm{III}\\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 & 55\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 13\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -38\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -18 \end{array}\right] \begin{array}{l} -4\cdot \mathrm{II}\\ \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 13\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -38\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -18 \end{array}\right]$$

$(**)$ Die Multipliaktion mit $\frac{3}{7}$ gehört eigentlich nicht zum „Schema F“, aber an der Stelle vereinfacht es die folgende Subtraktion.

(iii) Bestimme eine Lösung.

Lösung. Eine Lösung ist also

$$x = [3, 13, -38, -18]^T.$$

Probe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ -38 \\ -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 4 \cdot 13 - 3 \cdot 18 \\ 3 \cdot 13 - 38 \\ -4 \cdot 3 + 13 \\ 3 - 38 + 2 \cdot 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

○

(iv) Bestimme alle Lösungen.

Lösung. Das Gleichungssytem ist eindeutig lösbar, demnach sind schon alle Lösungen in (iii) angegeben. ○

Aufgabe 10 (Gleichungssysteme über $\mathbb{Z}_7$).

Betrachte das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \quad 3 \cdot x_4 &= 1 \\ 0 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + \quad 0 \cdot x_4 &= 1 \\ -4 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \quad 0 \cdot x_4 &= 1 \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + (-2) \cdot x_4 &= 1 \end{aligned}$$

über $\mathbb{Z}_7$.

(i) Bestimme die erweiterte Koeffizientenmatrix.

Lösung.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

○

(ii) Wende das Gauß-Jordan-Verfahren darauf an.

Lösung. Es handelt sich hier um das Gleichungssytem aus Aufgabe 9, allerdings hier über $\mathbb{Z}_7$ betrachtet. Wir könnten also einfach den Lösungsvektor modulo 7 betrachten:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ -38 \\ -18 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \bmod 7.$$

Zur Sicherheit aber hier nochmal die Rechnung:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ +4\cdot \mathrm{I} \\ -1\cdot \mathrm{I} \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot\frac{1}{3}(=5) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & -4 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -3\cdot \mathrm{II} \\ -3\cdot \mathrm{II} \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot\frac{1}{6}(=6) \\ \cdot\frac{1}{2}(=4) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} -3\cdot \mathrm{IV} \\ \\ -2\cdot \mathrm{IV} \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 & 55 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -38 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -18 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{3}\cdot \mathrm{III} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -5\cdot \mathrm{III} \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} -4\cdot \mathrm{II} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$\bigcirc$

(iii) Bestimme eine Lösung.

Lösung. Eine Lösung ist also

$$x = [3, 6, 4, 3]^T.$$

Probe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+4\cdot 6+3\cdot 3 \\ 3\cdot 6+4 \\ -4\cdot 3+6 \\ 3+4-2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\bigcirc$

(iv) Bestimme alle Lösungen.

Lösung. Das Gleichungssytem ist eindeutig lösbar, demnach sind schon alle Lösungen in (iii) angegeben. $\bigcirc$

Aufgabe 11 (Matrix invertieren).

Invertiere die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Lösung.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Hier bietet sich eine Vertauschung der Zeilen so an, dass wir kurz auf „Schema F” verzichten. :-)

Wir bringen also die letzte Zeile an zweite Position, die zweite wird zur dritten und die dritte zur vierten:

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -1\cdot \mathrm{I} \\ \\ \\ \end{array} \\
\rightsquigarrow &\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{array} \\
\rightsquigarrow &\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} -2\cdot \mathrm{IV} \\ +1\cdot \mathrm{IV} \\ +4\cdot \mathrm{IV} \\ \\ \end{array} \\
\rightsquigarrow &\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} -4\cdot \mathrm{III} \\ +6\cdot \mathrm{III} \\ \\ \\ \end{array} \\
\rightsquigarrow &\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 4 & 18 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -6 & -25 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} +2\cdot \mathrm{II} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\rightsquigarrow &\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -8 & -32 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -6 & -25 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} +2\cdot \mathrm{II} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{aligned}$$

Wir haben also als inverse Matrix

$$\begin{bmatrix} -1 & -8 & -32 & 2 \\ -1 & -6 & -25 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

berechnet.

Probe:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -8 & -32 & 2 \\ -1 & -6 & -25 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -8 & -32 & 2 \\ -1 & -6 & -25 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

○

Aufgabe 12 (Matrix invertieren).

Invertiere die Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_7^{4\times 4}.$$

Lösung. *Bemerkung*: Die Aufgabe wird im symmetrischen Restesystem gelöst. Nach dem Schema müssen wir hier zuerst die beiden oberen Zeilen vertauschen:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} -2 & -3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ +2\cdot \mathrm{I} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -1 \cdot \mathrm{II} \\ -3 \cdot \mathrm{II} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot 2 \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ -1 \cdot \mathrm{III} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -2 \cdot \mathrm{IV} \\ \\ +2 \cdot \mathrm{IV} \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} +2 \cdot \mathrm{II} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Also haben wir als inverse Matrix:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Probe:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\bigcirc$

Aufgabe 13 (Gleichungssysteme über $\mathbb{Q}$).

Betrachte das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}(-1)\cdot x_1 + \quad 2\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 0\cdot x_4 &= \ \ 2\\ 1\cdot x_1 + (-2)\cdot x_2 + 2\cdot x_3 + 3\cdot x_4 &= -2\\ 2\cdot x_1 + (-4)\cdot x_2 + 2\cdot x_3 + 4\cdot x_4 &= -4\\ 4\cdot x_1 + (-8)\cdot x_2 + 5\cdot x_3 + 9\cdot x_4 &= -8\end{aligned}$$

über $\mathbb{Q}$.

(i) Bestimme die erweiterte Koeffizientenmatrix.

Lösung.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 2 & 3 & -2\\ 2 & -4 & 2 & 4 & -4\\ 4 & -8 & 5 & 9 & -8 \end{array}\right].$$

○

(ii) Wende das Gauß-Jordan-Verfahren darauf an.

Lösung.

$$\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 2 & 3 & -2\\ 2 & -4 & 2 & 4 & -4\\ 4 & -8 & 5 & 9 & -8 \end{array}\right]\end{array} \begin{array}{l}\cdot(-1)\\ \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 & -2\\ 1 & -2 & 2 & 3 & -2\\ 2 & -4 & 2 & 4 & -4\\ 4 & -8 & 5 & 9 & -8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -1\cdot \mathrm{I}\\ -2\cdot \mathrm{I}\\ -4\cdot \mathrm{I}\end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 9 & 9 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot\frac{1}{3}\\ \cdot\frac{1}{4}\\ \cdot\frac{1}{9}\end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} +1\cdot \mathrm{II}\\ \\ -1\cdot \mathrm{II}\\ -1\cdot \mathrm{II}\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

○

(iii) Bestimme eine Lösung.

Lösung. Eine Lösung ist also $x = [-2, 0, 0, 0]^T$. ○

(iv) Bestimme alle Lösungen.

Lösung. Dafür entzerren wir die Matrix:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Die Menge aller Lösungen ist dann:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q} \right\}.$$

○

Aufgabe 14 (Algorithmus „Rücksubstitution“).

Der folgende Algorithmus berechnet die Lösung eines Gleichungssystem, dessen Matrix in oberer Dreiecksgestalt vorliegt und auf der Diagonale steht überall 1.

Algorithmus. Rücksubstitution.

Eingabe: Eine quadratische Matrix $A \in F^{n\times n}$ mit $\forall i \in \{1,\dots,n\} \quad A_{ii} = 1$ und $\forall i,j \in \{1,\dots,n\} \quad i > j \Rightarrow A_{ij} = 0$, sowie ein Vektor $b \in F^n$.
Ausgabe: Ein Vektor $x \in F^n$ mit $A \cdot x = b$.

1. Für $i = n$ abwärts bis 1 erledige 2–4
2. $\quad x_i \leftarrow b_i$.
3. $\quad$ Für $j = i + 1$ aufwärts bis n erledige
4. $\qquad x_i \leftarrow x_i - A_{ij}x_j$.
5. Antworte x.

(i) Sei $i \in \{1,\dots,n\}$. Bestimme die Anzahl der arithmetischen Operationen (Additionen, Subtraktionen, Multipikationen, Divisionen), die der i-te Durchlauf der inneren Schleife, Zeilen 3–4, durchführt.

Lösung. Für gegebenes i werden $n-i$ Multiplikationen und $n-i$ Subtraktionen durchgeführt, insgesamt also $2(n-i)$ arithmetische Operationen. ○

(ii) Bestimme die Anzahl der arithmetischen Operationen (Additionen, Subtraktionen, Multipikationen, Divisionen), die der gesamte Algorithmus durchführt.

Lösung. Insgesamt gibt es also

$$\sum_{i=1}^{n} (n-i) = \sum_{i=1}^{n} n - \sum_{i=1}^{n} i = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n^2}{2} - \frac{n^2+n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$$

Multiplikationen bzw. Subtraktionen und somit

$$2 \cdot \frac{n^2 - n}{2} = n^2 - n$$

aritmetische Operationen. ○

(iii*) Zeige, dass am Ende von Zeile 4 jeweils

$$x_i = b_i - \sum_{i<k\leq j} A_{ik} x_k$$

gilt.

Lösung. Bezeichne $x_i^{(j)}$ das x_i nach dem j-ten Durchlauf der inneren Schleife, $i + 1 \leq j \leq n$ und $x_i^{(i)}$ das x_i nach Schritt 2 (also vor dem $i + 1$-ten Durchlauf).

Behauptung. *Für* $i \leq j \leq n$ *gilt:* $x_i^{(j)} = b_i - \sum_{i<k\leq j} A_{ik} x_k^{(n)}$.

Wir führen den Beweis per Induktion nach j:

Induktionsanfang $j = i$:

$$x_i^{(i)} = b_i - \sum_{i<k\leq i} A_{ik} x_k^{(n)} = b_i.$$

Induktionsschritt $j \to j + 1$ mit $j + 1 \leq n$:

$$\begin{aligned} x_i^{(j+1)} &= x_i^{(j)} - A_{i,j+1} x_i^{(n)} \\ &\overset{\text{IV}}{=} b_i - \sum_{i<k\leq j} A_{ik} x_k^{(n)} - A_{i,j+1} x_i^{(n)} \\ &= b_i - \sum_{i<k\leq j+1} A_{ik} x_k^{(n)}. \end{aligned}$$

○

(iv*) Schließe, dass der Algorithmus korrekt arbeitet, also mit einem x mit $A \cdot x = b$ antwortet.

Lösung. Nach (ii) gilt nach der Schleife in 3–4:

$$x_i = b_i - \sum_{i<k\leq n} A_{ik} x_k,$$

also $b_i = x_i + \sum_{i<k\leq n} A_{ik} x_k = \sum_{1\leq k\leq n} A_{ik} x_k$, da A in Treppenform nach Voraussetzung. Damit gilt $Ax = b$ (wie gewünscht). ○

Aufgabe 15 (Paderborner Allerlei II).

Kreuze bei folgenden Fragen jeweils die richtige(n) Antwort(en) an. Es können auch mehrere Antworten zutreffen. (Eine richtige Lösung gibt jeweils einen Punkt, eine falsche Lösung gibt einen Minuspunkt. Keine Antwort gibt keine Punkte.)

(i) Der größte gemeinsame Teiler zweier ganzer Zahlen x und y ist immer ein Teiler des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von x und y.

[X] Wahr [ ] Falsch

Lösung. Es gilt $\mathrm{ggT}(x,y) \mid x$ und $x \mid \mathrm{kgV}(x,y)$. Daher folgt $\mathrm{ggT}(x,y) \mid \mathrm{kgV}(x,y)$. (Natürlich gilt auch $\mathrm{ggT}(x,y) \mid y$ und $y \mid \mathrm{kgV}(x,y)$, aber das brauchen wir nicht.) ◯

(ii) Die Relation $\{(x,y) \in M \times M \mid x \text{ ist größer als } y\}$ ist eine Teilordnung auf der Menge M aller Menschen.

[ ] Wahr [X] Falsch

Lösung. Die Relation ist nicht reflexiv. ◯

(iii) Die Abbildung $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist

[X] injektiv [ ] surjektiv [ ] bijektiv [ ] nichts davon

Lösung. Injektiv: Keine zwei Zahlen aus $\mathbb{R}_{>0}$ haben das gleiche Quadrat. Nicht surjektiv: -1 ist kein Quadrat. Also auch nicht bijektiv. ◯

(iv) Die Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ a \mapsto \lfloor a/2 \rfloor$ ist

[ ] injektiv [X] surjektiv [ ] bijektiv [ ] nichts davon

Lösung. Nicht injektiv: Es gibt $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\lfloor a/2 \rfloor = \lfloor b/2 \rfloor$, z.B. 2 und 3. Surjektiv: Ein Urbild für $z \in \mathbb{Z}$ ist $2z$. Damit nicht bijektiv. ◯

(v) Eine Abbildung $f\colon M \to N$ ist surjektiv genau dann, wenn für alle $x \in M$ ein $y \in N$ existiert mit $f(x) = y$.

[ ] Wahr [X] Falsch

Lösung. Was hier steht ist, dass f linkstotal ist und das gilt für jede Funktion. ◯