12. Musterlösung zu Mathematik für Informatiker I, WS 2003/04

KATHRIN TOFALL

Aufgabe 12.1 (Matrixoperationen). (3 Punkte)

Berechne über $\mathbb{Q}$.

(i) $5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Berechne über $\mathbb{Z}_7$.

(iv) $5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Lösung. (i) $5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 15 & 0 & -10 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 9 & -8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

(iv) $5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 15 & 0 & -10 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ in $\mathbb{Z}_7$

(v) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ in $\mathbb{Z}_7$

(vi) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 9 & -8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ in $\mathbb{Z}_7$

○

Aufgabe 12.2 (Matrixmultiplikation). (5 Punkte)

Berechne die Produkte aller folgenden reellen Matrizen, soweit möglich:

2 Erkennen, 3 Rechnen

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \quad M_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad M_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad M_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad M_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Lösung.

- $M_{11} \cdot M_{11} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, M_{11} \cdot M_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, M_{11} \cdot M_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$
- $M_{12} \cdot M_{21} = \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix}, M_{12} \cdot M_{22} = \begin{bmatrix} 13 & 4 \end{bmatrix}, M_{12} \cdot M_{23} = \begin{bmatrix} 13 & 4 & 3 \end{bmatrix},$
- $M_{13} \cdot M_{31} = \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix}, M_{13} \cdot M_{32} = \begin{bmatrix} 13 & 1 \end{bmatrix}, M_{13} \cdot M_{33} = \begin{bmatrix} 13 & 1 & -6 \end{bmatrix},$
- $M_{21} \cdot M_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}, M_{21} \cdot M_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}, M_{21} \cdot M_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix},$
- $M_{22} \cdot M_{21} = \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix}, M_{22} \cdot M_{22} = \begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 12 & 13 \end{bmatrix}, M_{22} \cdot M_{23} = \begin{bmatrix} 13 & 4 & 3 \\ 12 & 13 & 18 \end{bmatrix},$
- $M_{23} \cdot M_{31} = \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix}, M_{23} \cdot M_{32} = \begin{bmatrix} 13 & 1 \\ 12 & 13 \end{bmatrix}, M_{23} \cdot M_{33} = \begin{bmatrix} 13 & 1 & -6 \\ 12 & 13 & 18 \end{bmatrix},$
- $M_{31} \cdot M_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, M_{31} \cdot M_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_{31} \cdot M_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 12 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$
- $M_{32} \cdot M_{21} = \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \\ -6 \end{bmatrix}, M_{32} \cdot M_{22} = \begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 12 & 13 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}, M_{32} \cdot M_{23} = \begin{bmatrix} 13 & 4 & 3 \\ 12 & 13 & 18 \\ -6 & -1 & 0 \end{bmatrix},$
- $M_{33} \cdot M_{31} = \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \\ -6 \end{bmatrix}, M_{33} \cdot M_{32} = \begin{bmatrix} 13 & 1 \\ 12 & 13 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}, M_{33} \cdot M_{33} = \begin{bmatrix} 13 & 1 & -6 \\ 12 & 13 & 18 \\ -6 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$

Aufgabe 12.3 (Gleichungssysteme über $\mathbb{Z}_7$). (6 Punkte)

(i) Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + (-1) \cdot x_4 &= 1 \\ 0 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &= 0 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &= 1 \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + (-1) \cdot x_4 &= 1 \end{aligned}$$

über $\mathbb{Z}_7$.

(ii) Bestimme alle Lösungen der Matrixgleichung

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

über $\mathbb{Z}_7$.

Lösung. Auch hier lösen wir die beiden Aufgabenteile wieder gleichzeitig: *Nach Schema F*:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r|r} 3 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{3}(=5) \\ \cdot\frac{1}{3}(=5) \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 3 & 5 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ -\mathrm{I} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 3 & 5 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -\mathrm{II} \\ -4\cdot\mathrm{II} \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 3 & 5 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot\frac{1}{5}(=3) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 3 & 5 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ -4\cdot\mathrm{III} \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 3 & 5 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot\frac{1}{4}(=2) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 3 & 5 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} -2\cdot\mathrm{IV} \\ \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 3 & 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} -5\cdot\mathrm{III} \\ -3\cdot\mathrm{III} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 3 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} -3\cdot\mathrm{II} \\ \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Geschickter:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r|r} 3 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -3\cdot\mathrm{II} \\ -3\cdot\mathrm{I} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot\frac{1}{6}(=6) \\ -2\cdot\mathrm{II} \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -\mathrm{III} \\ \\ +\mathrm{III} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot\frac{1}{2}(=4) \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} +\mathrm{IV} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Als Lösung von (i) können wir dann $\begin{bmatrix}4 & 5 & 3 & 3\end{bmatrix}^T$ ablesen. Entsprechend ist die Lösung von (ii) : $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$. ◯

Aufgabe 12.4 (Inverse Matrix). (7 Punkte)

$\boxed{6}$ Betrachte die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

Bestimme eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $A \cdot X = I_4$. (Hier bezeichnet I_4 die 4×4-Einheitsmatrix.) Beachte, dass damit die Spalten x_1, x_2, x_3, x_4 von X die Lösungen der Gleichungssysteme $A \cdot x_i = e_i$ sind, wobei e_i die i-te Spalte der Einheitsmatrix ist.

$\boxed{1}$ Berechne zur Probe $X \cdot A$.

Bemerkung: Man nennt X die *zu A inverse Matrix*.

Lösung.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot\frac{1}{3} \\ -\mathrm{I} \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ +2\cdot\mathrm{II} \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 3 & -1 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-\frac{3}{8}) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ +\mathrm{III} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot(-8) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 3 & -8 \end{array}\right] \begin{array}{l} -\mathrm{IV} \\ \\ +\frac{9}{8}\cdot\mathrm{IV} \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & -2 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 3 & -8 \end{array}\right] \begin{array}{l} -3\cdot\mathrm{III} \\ +\frac{1}{3}\cdot\mathrm{III} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 13 & -8 & -12 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 3 & -8 \end{array}\right] \begin{array}{l} -2\cdot\mathrm{II} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 15 & -10 & -14 & 41 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 3 & -8 \end{array}\right]$$

Also haben wir als Inverse zu A hier $A^{-1} = \begin{bmatrix} 15 & -10 & -14 & 41 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 3 & -9 \\ -3 & 2 & 3 & -8 \end{bmatrix}$ berechnet.

Probe:

$$\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&3&-1&0\\1&0&1&4\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}15&-10&-14&41\\-1&1&1&-3\\-3&2&3&-9\\-3&2&3&-8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}15-2-9-3&-10+2+6+2&-14+2+9+3&41-6-27-8\\-3+3&3-2&3-3&-9+9\\15-3-12&-10+2+8&-14+3+12&41-9-32\\3-3&-2+3&-3+3&9-8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$\bigcirc$

Aufgabe 12.5 (Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$). (8 Punkte)

(i) Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}1\cdot x_1+2\cdot x_2+\ 4\cdot x_3+\ 5\cdot x_4&=1,\\3\cdot x_1+6\cdot x_2+\ 2\cdot x_3+\ 1\cdot x_4&=0,\\0\cdot x_1+0\cdot x_2+10\cdot x_3+14\cdot x_4&=3\end{aligned}$$

über $\mathbb{R}$.

(ii) Bestimme alle Lösungen der Matrixgleichung

$$\begin{bmatrix}1&2&4&5\\3&6&2&1\\0&0&10&14\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

über $\mathbb{R}$.

Lösung. Es handelt sich hier im Prinzip um zweimal die gleiche Aufgabe, nur ist einmal der angegebene Vektor $\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$ und einmal $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$. Wir können also beide Aufgabenteile auf einmal lösen:

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c}1&2&4&5&1&0\\3&6&2&1&0&0\\0&0&10&14&3&0\end{array}\right]\begin{array}{l}\\-3\cdot\mathrm{I}\\\\\end{array}\rightsquigarrow\left[\begin{array}{cccc|c|c}1&2&4&5&1&0\\0&0&-10&-14&-3&0\\0&0&10&14&3&0\end{array}\right]\begin{array}{l}\\\cdot(-1)\\\\\end{array}$$

$$\rightsquigarrow\left[\begin{array}{cccc|c|c}1&2&4&5&1&0\\0&0&10&14&3&0\\0&0&10&14&3&0\end{array}\right]\begin{array}{l}\\\\-\mathrm{II}\end{array}\rightsquigarrow\left[\begin{array}{cccc|c|c}1&2&4&5&1&0\\0&0&10&14&3&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]\begin{array}{l}\\\cdot\frac{1}{10}\\\\\end{array}$$

$$\rightsquigarrow\left[\begin{array}{cccc|c|c}1&2&4&5&1&0\\0&0&1&\frac{7}{5}&\frac{3}{10}&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]\begin{array}{l}-4\cdot\mathrm{II}\\\\\\\end{array}\rightsquigarrow\left[\begin{array}{cccc|c|c}1&2&0&-\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}&0\\0&0&1&\frac{7}{5}&\frac{3}{10}&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

Nach Durchführung des Entzerrungsalgorithmus (siehe *Aufgabe 12.6) erhalten wir:

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Die Lösungsmenge von (i) ist dann:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{10} \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{7}{5} \\ -1 \end{bmatrix} \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Entsprechend ist die Lösungsmenge von (ii):

$$\left\{ \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{7}{5} \\ -1 \end{bmatrix} \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

○

***Aufgabe 12.6** (Entzerrungsalgorithmus). (0 Punkte)

Oder: Wie man vereinfachte Gleichungssysteme „optisch“ löst.

Satz (Entzerrungsalgorithmus). *Die Lösungen eines Gleichungssystems $Ax = b$, dessen Koeffizientenmatrix A bereits in Stufenform ist, kann man wie folgt ablesen:*

Enthält A eine Nullzeile, deren Fortsetzung in b nicht Null ist, so gibt es keine Lösungen.

Andernfalls gibt es Lösungen und wir erhalten sie, indem wir

- *Alle Nullzeilen in $[A|b]$ streichen.*
- *Neue Zeilen der Form*

  $$[0 \dots 0 \ -1 \ 0 \dots 0|0]$$

  so einfügen, dass die Hauptdiagonale nur 1 und -1 enthält.

Die Spalten, in denen wir eine -1 eingefügt haben, spannen den Kern auf. Die aus b entstandene rechte Spalte ist eine spezielle Lösung.

Beispiel: Nach Gaußelimination haben wir die Koeffizientenmatrix

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{Zeile einfügen.} \\ \leftarrow \text{Zeile einfügen.} \\ \leftarrow \text{Nullzeile.} \end{array}$$

erhalten. (Die Pivotelemente sind eingekreist.) Nun sollen wir Nullzeilen streichen und Zeilen mit einer -1 einfügen, sodass die Hauptdiagonale nur 1 und -1 enthält. Das sind hier zwei Zeilen.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \end{array}\right].$$

Aus diesem „entzerrten“ Schema lassen sich nun alle Lösungen leicht ablesen: Die Lösungen von $Ax = b$ sind nun genau die Vektoren der Form

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Eine spezielle Lösung haben wir aus der rechten Spalte, die allgemeine Lösung des homogenen Systems bekommen wir aus all den Spalten, in die wir eine -1 eingefügt haben.

(i*) Überprüfe den Satz im angegeben Beispiel.

(ii*) Überprüfe den Satz in weiteren Beispielen.

(iii*) Begründe den Satz.

(iv*) Beweise den Satz. *Hinweis*: Das größte Problem hier ist, eine angemessene Notation zu finden.