11. Musterlösung zu Mathematik für Informatiker I, WS 2003/04

Kathrin Tofall

Aufgabe 11.1 (Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit). (3 Punkte)

(i) Zeige, dass die Menge der durch drei teilbaren natürlichen Zahlen abzählbar ist. $\boxed{1}$

Lösung. Setze $G = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Offenbar ist $f\colon \mathbb{N} \to G,\ n \mapsto 3n$ bijektiv. Somit ist die Menge der geraden natürlichen Zahlen abzählbar.

(ii) Zeige, dass die Menge $\mathbb{Q}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ der Gaußschen (rationalen) Zahlen abzählbar ist. $\boxed{1}$

Lösung. Aus der Vorlesung (oder Brill, Satz 4.12) wissen wir, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist. Wir haben

$$\mathbb{Q} = \left\{0, -1, 1, -2, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -3, 3, -4, 4, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \dots\right\},$$

wenn wir $\mathbb{Q}$ in der dort angegebenen Reihenfolge und auch Null und die Negativen aufzählen. (Es werden die Brüche $\frac{p}{q}$ aufgezählt mit $p + q = k$ und $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$ bei wachsendem k und p wachsend für gerade k und fallend für ungerade. *Achtung*: In Abbildung 4.7 in Brill müssen noch die Brüche weggelassen werden, die nicht gekürzt sind!)

	0	-1	1	-2	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
0	$0+0i$	$0-1i$	$0+1i$	$0-2i$	$0+2i$	$0-\frac{1}{2}i$	$0+\frac{1}{2}i$	$0-\frac{1}{3}i$	$0+\frac{1}{3}i$	$\cdots$
-1	$-1+0i$	$-1-1i$	$-1+1i$	$-1-2i$	$-1+2i$	$-1-\frac{1}{2}i$	$-1+\frac{1}{2}i$	$-1-\frac{1}{3}i$	$-1+\frac{1}{3}i$	$\cdots$
1	$1+0i$	$1-1i$	$1+1i$	$1-2i$	$1+2i$	$1-\frac{1}{2}i$	$1+\frac{1}{2}i$	$1-\frac{1}{3}i$	$1+\frac{1}{3}i$	$\cdots$
-2	$-2+0i$	$-2-1i$	$-2+1i$	$-2-2i$	$-2+2i$	$-2-\frac{1}{2}i$	$-2+\frac{1}{2}i$	$-2-\frac{1}{3}i$	$-2+\frac{1}{3}i$	$\cdots$
2	$2+0i$	$2-1i$	$2+1i$	$2-2i$	$2+2i$	$2-\frac{1}{2}i$	$2+\frac{1}{2}i$	$2-\frac{1}{3}i$	$2+\frac{1}{3}i$	$\cdots$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}+0i$	$-\frac{1}{2}-1i$	$-\frac{1}{2}+1i$	$-\frac{1}{2}-2i$	$-\frac{1}{2}+2i$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i$	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i$	$\cdots$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+0i$	$\frac{1}{2}-1i$	$\frac{1}{2}+1i$	$\frac{1}{2}-2i$	$\frac{1}{2}+2i$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i$	$\cdots$
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}+0i$	$-\frac{1}{3}-1i$	$-\frac{1}{3}+1i$	$-\frac{1}{3}-2i$	$-\frac{1}{3}+2i$	$-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i$	$-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}i$	$-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i$	$-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i$	$\cdots$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}+0i$	$\frac{1}{3}-1i$	$\frac{1}{3}+1i$	$\frac{1}{3}-2i$	$\frac{1}{3}+2i$	$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}i$	$\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

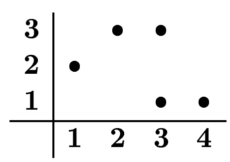
1 (iii) Zeige, dass die Menge $[0, \frac{1}{7}]$ der reellen Zahlen zwischen 0 und $\frac{1}{7}$, je einschliesslich, überabzählbar ist.

Lösung. Hier genügt es eine bijektive (=injektive und surjektive) Abbildung $h\colon [0, \frac{1}{7}] \to [0, 1]$ anzugeben. Nehmen wir nun an, dass wir $[0, \frac{1}{7}]$ abzählen können, also eine bijektive Funktion $a\colon \mathbb{N} \to [0, \frac{1}{7}]$ existiert. Dann gibt es auch eine Abzählung von $[0, 1]$, nämlich $h \circ a$. Die gibt es aber laut Vorlesung (oder Brill Satz 4.13) nicht. Das ist ein Widerspruch und also ist $[0, \frac{1}{7}]$ überabzählbar.

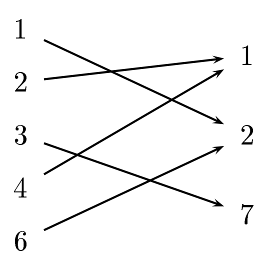
Aufgabe 11.2 (Relationen und Eigenschaften). (2 Punkte)

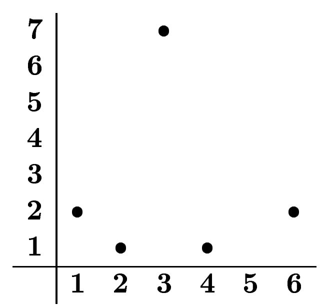
Betrachte die Relation $R = \{(1, 2), (2, 1), (3, 7), (4, 1), (6, 2)\}$.

1/2 (i) Stelle sie als Pfeildiagramm und bildlich als Teilmenge von $\{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 7\}$ dar, wie im folgenden Beispiel:



Lösung. Pfeildiagramm: Relation als Bild:





1/2 (ii) Ist R eine Funktion?

Lösung. Die Relation R ist eine Funktion, wenn R rechtseindeutig und linkstotal ist. Da in dem Pfeildiagramm von keinem Element der linken Seite zwei oder mehr Pfeile ausgehen, ist Rechtseindeutigkeit erfüllt. Da im Pfeildiagramm von allen Elementen der linken Seite ein Pfeil ausgeht, ist R linkstotal und R somit eine Funktion von $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ nach $\{1, 2, 7\}$.

1/2 (iii) Ist R eine Funktion von $\{1, \dots, 6\}$ nach $\{1, \dots, 7\}$?

Lösung. In diesem Sinne ist R keine Funktion, denn dann wäre auf der linken Seite des Pfeildiagramms noch die 5 mit zu beachten und von der geht kein Pfeil aus. Somit ist die Linkstotalität verletzt und R hier keine Funktion. ◯

(iv) Ist R^{-1} eine Funktion? $\boxed{1/2}$

Lösung. Nein. Die Rechtseindeutigkeit ist verletzt für z.B. $x = 1, y_1 = 2$ und $y_2 = 4$. ◯

Aufgabe 11.3 (Relationen und Eigenschaften). (6 Punkte)

Sei M die Menge aller Menschen. Beantworte und begründe die folgenden Fragen.

(i) Ist die Relation $\boxed{1}$

$$G = \{(x, y) \in M \times M \,|\, x \text{ ist Bruder oder Schwester von } y \text{ oder } x = y\ \}$$

(a) eine Äquivalenzrelation, (b) eine Teilordnung, (c) eine Ordnung?

Lösung.
- G ist reflexiv, da für alle $x \in M$ gilt $x = x$ und somit $G(x, x)$.
- G ist symmetrisch. Wenn x Bruder oder Schwester von y ist, dann muß auch y Bruder oder Schwester von x sein.
- G ist transitiv, dann wenn x Bruder oder Schwester von y ist und y Bruder oder Schwester von z ist, dann muß auch x Bruder oder Schwester von z oder selbst z sein.

Somit handelt es sich bei G um eine Äquivalenzrelation.

- G ist nicht antisymmetrisch, da wenn x Bruder oder Schwester von y ist, sofort y Bruder oder Schwester von x sein muß, also folgt aus $(x, y) \in G$ und $(y, x) \in G$ nicht unbedingt $x = y$, also ist G keine Teilordnung und damit auch keine Ordnung. ◯

(ii) Ist die Relation $\boxed{1}$

$$A = \{(x, y) \in M \times M \,|\, x \text{ ist Vorfahr von } y \text{ oder } x = y\}$$

(a) eine Äquivalenzrelation, (b) eine Teilordnung, (c) eine Ordnung?

Lösung.
- A ist reflexiv, da für alle $x \in M$ gilt $x = x$ und somit $A(x, x)$.
- A ist antisymmetrisch. Wenn x Vorfahr von y ist, dann kann y nicht Vorfahr von x sein, also muß im Fall $(x, y) \in A$ und $(y, x) \in A$ schon $x = y$ gelten.

- A ist transitiv. Wenn x Vorfahr von y ist und y Vorfahr von z, dann ist x auch Vorfahr von z.
- A ist nicht total. Gegenbeispiel: Hänsel und Gretel sind Geschwister, also ist Hänsel nicht Vorfahr von Gretel und Gretel auch nicht Vorfahr von Hänsel.

Also ist A eine Teilordnung.

- A ist nicht symmetrisch. Wenn Ulrich der Großvater von Niklas ist, dann ist Ulrich Vorfahr von Niklas. Niklas aber ganz bestimmt nicht Vorfahr von Ulrich. Also ist A keine Äquivalenzrelation. ○

$\boxed{1}$ (iii) Ist die Relation $N = \{(x,y) \in M \times M \,|\, x \text{ ist Nachbar von } y\}$ (a) eine Äquivalenzrelation, (b) eine Teilordnung, (c) eine Ordnung?

Lösung. Die Relation ist nichts von alldem, da sie nicht reflexiv ist. Man kann schlecht sein eigener Nachbar sein.

Betrachtet man doch jeden als seinen eigenen Nachbar, so bleibt trotzdem, dass die Relation auch nicht transitiv ist. Der Nachbar unseres Nachbarn (oder gar dessen Nachbar) ist meist nicht mehr unser Nachbar.

Damit ist die Relation weder eine Äquivalenzrelation noch eine Teilordnung oder gar eine Ordnung. ○

$\boxed{1}$ (iv) (a) Ist die Relation $V = \{(x,y) \in M \times M \,|\, y \text{ ist Mutter von } x\}$ eine Funktion? (b) Ist V^{-1} eine Funktion?

Lösung.
- V ist linkstotal, da jeder eine Mutter hat.
- V ist rechtseindeutig, da niemand mehr als eine (biologische) Mutter hat.

Damit ist V eine Funktion.

- V^{-1} ist nicht rechtseindeutig, da eine Frau mehr als ein Kind haben kann.
- V^{-1} ist nicht linkstotal, da eine Frau keine Kinder haben muß.

Also ist V^{-1} keine Funktion. ○

$\boxed{1}$ (v) Ist die Relation $T = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x - y \in \mathbb{Z}\}$ (a) eine Äquivalenzrelation, (b) eine Teilordnung, (c) eine Ordnung?

Lösung.
- Die Relation T ist reflexiv, da $x - x = 0$ und $0 \in \mathbb{Z}$.
- Die Relation T ist symmetrisch. Wenn $x - y \in \mathbb{Z}$, dann ist auch $y - x = (-1) \cdot (x - y) \in \mathbb{Z}$, da $-1 \in \mathbb{Z}$.
- Die Relation T ist transitiv. Gegeben sind jetzt $(x,y) \in T$ und $(y,z) \in T$, also $x - y \in \mathbb{Z}$ und $y - z \in \mathbb{Z}$. Betrachte jetzt $x - z$:

$$x - z = x - y + y - z = (x - y) + (y - z).$$

Da $x - y \in \mathbb{Z}$ und $y - z \in \mathbb{Z}$ ist, dann auch $x - z \in \mathbb{Z}$.

Also ist T Äquivalenzrelation.

- Die Relation T ist nicht antisymmetrisch. Betrachte $x, y \in \mathbb{Z}$, etwa $x = 0$ und $y = 1$, dann ist auch immer $x - y \in \mathbb{Z}$ und $y - x \in \mathbb{Z}$. Also muß hier bei $(x, y) \in T$ und $(y, x) \in T$ nicht $x = y$ gelten. Also ist T keine Teilordnung und auch keine Ordnung. ◯

(vi) Ist die Relation $P = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y \in \mathbb{Z}\}$ (a) eine Äquivalenzrelation, (b) eine Teilordnung, (c) eine Ordnung? $\boxed{1}$

Lösung. P ist nicht reflexiv: $\pi \in \mathbb{R}$, aber $\pi + \pi \notin \mathbb{Z}$, also $(\pi, \pi) \notin P$. Also ist P nichts von den dreien. ◯

Aufgabe 11.4 (Funktionen). (5 Punkte)

Untersuche die folgenden Funktionen auf Injektivität und Surjektivität. (Beweise Deine Antworten!)

(i) $c\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x^3$. $\boxed{1}$

Lösung. Die Abbildung c ist nicht surjektiv, da nicht zu jedem $y \in \mathbb{N}$ ein $x \in \mathbb{N}$ existiert mit $y = x^3$. Also: nicht jede natürlich Zahl ist dritte Potenz einer anderen natürlichen Zahl. Beispiel: $\nexists x \in \mathbb{N}$ mit $x^3 = 2$. Aber c ist injektiv, da für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $x \neq y$, dann ist auch $x^3 \neq y^3$. (Genauer: Aus $0 \leq x < y$ folgt $0 \leq x^3 < y^3$ und...) ◯

(ii) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$. $\boxed{1}$

Lösung. Die Abbildung f ist surjektiv, da zu jedem $y \in \mathbb{R}$ ein $x \in \mathbb{R}$ existiert mit $y = x^3$. Also: Jede reelle Zahl hat eine reelle dritte Wurzel. Außerdem ist c auch injektiv, da für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: Wenn $x \neq y$, dann ist auch $x^3 \neq y^3$. (S.o.) Damit ist f bijektiv. ◯

(iii) $m\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{42},\ x \mapsto x \bmod 42$. $\boxed{1}$

Lösung. Die Abbildung m ist surjektiv, da für alle $y \in \mathbb{Z}_{42}$ ein $x \in \mathbb{Z}$ existiert mit $y = x \bmod 42$. m wäre injektiv, wenn für alle $x, y \in \mathbb{Z}$: $x \neq y \Rightarrow (x \bmod 42) \neq (y \bmod 42)$. Das ist aber falsch, wie man z.B. an $x = 3$ und $y = 45$ sieht. ◯

(iv) $w\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x(x+1)(x-1)$. $\boxed{1}$

Lösung. Die Abbildung w wäre surjektiv, wenn für alle $y \in \mathbb{R}$ ein $x \in \mathbb{R}_{>0}$ existierte mit $y = x(x+1)(x-1)$. Das ist aber nicht der Fall, wie das Beispiel $y = -2$ belegt. Der Ausdruck $x(x+1)(x-1)$ kann nur negativ werden, wenn $x \in (0, 1)$. Dann aber ist der Betrag des Ausdrucks viel zu klein um jemals die 2 zu erreichen. w ist nicht injektiv, da für $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ gilt: $w(x_1) = 0 = w(x_2)$ aber $x_1 \neq x_2$. ◯

$\boxed{1}$ (v) $p\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{13}^{\times},\ e \mapsto 2^e$.

Lösung. Die Abbildung p ist surjektiv, da für alle $y \in \mathbb{Z}_{13}^{\times}$ ein $x \in \mathbb{Z}$ existiert mit $y = 2^x$: $p(0) = 1$, $p(1) = 2$, $p(2) = 4$, $p(3) = 8$, $p(4) = 3$, $p(5) = 6$, $p(6) = 12$, $p(7) = 11$, $p(8) = 9$, $p(9) = 5$, $p(10) = 10$, $p(11) = 7$ und für $p(12)$ gilt dann wieder $p(12) = 1$.

p wäre injektiv, wenn für alle $x, y \in \mathbb{Z}$: $x \neq y \Rightarrow 2^x \neq 2^y$. Das ist aber falsch, da z.B. $2^{13} \equiv 2 \bmod 13$ und $2^1 \equiv 2 \bmod 13$. $\bigcirc$

Aufgabe 11.5 (Schubfachprinzip). (2 Punkte)

Du ziehst Kugeln aus einer Urne, in der sich 10 rote und 10 grüne Kugeln befinden. Wieviele Kugeln musst Du ohne Zurücklegen ziehen, um sicher zu sein, dass Du wenigstens zwei gleiche bekommst? Beweise Deine Antwort.

Lösung. Nach drei gezogenen Kugeln sind in jedem Fall zwei gleichfarbige dabei, da drei Kugeln auf zwei Schubfächer „rot“ und „grün“ verteilt werden müssen und $2 < 3$ ist.

Formaler: Wir betrachten die Funktion f auf der Menge Z der gezogenen Kugeln, die jeder Kugel eine Farbe aus der Menge $\{\text{rot}, \text{grün}\}$ zuordnet. Hat Z mehr Elemente als es Farben gibt und das ist bereits für $\#Z = 3$ der Fall, so kann f nicht injektiv sein, und das heißt, dass zwei der gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben. $\bigcirc$