5. Musterlösung zu Mathematik für Informatiker I, WS 2003/04

KATHRIN TOFALL

Aufgabe 5.1 (Erste Schritte in MAPLE). (4 Punkte)

Wer mit wirklich grossen Zahlen rechnen will, braucht Programme die so etwas können. Eines davon soll in dieser Aufgabe ausprobiert werden.

- Rufe in Deinem Informatik-Login `xmaple8` auf. Das kannst Du (je nach Oberfläche) beispielsweise tun, indem Du ein Terminalfenster öffnest und darin `xmaple8` eintippst und die Enter- oder Return-Taste drückst. Nun sollte MAPLE starten.
- MAPLE-Kommandos sehen oft wie mathematische Formeln aus und müssen immer mit einem Semicolon (oder einem Doppelpunkt) beendet werden, bevor man sie mit Enter abschickt:

  ```
  > 109812390812309898 * 987987908232132;
  > bruch := 109812390812309898 / 987987908232132;
  > floor( bruch );
  > 1 + 2 * 3;
  > (1 + 2) * 3;
  > x := 17;
  > y := x^2;
  > (2*x-30)^4 = 2^8;
  ```

  Das pfeilähnliche Zeichen am Anfang ist die Eingabeaufforderung und muss *nicht* eingegeben werden.
- Mehrzeilige Kommandos können auch eingegeben werden. Eine neue Zeile beginnt man mit Shift+Enter, denn Enter würde Maple auffordern, das bis dahin Getippte auszuführen.

Und jetzt kann's losgehen.

(i) Berechne

$$98765432109876543210 + 12345678901234567890,$$
$$98765432109876543210 \cdot 12345678901234567890,$$
$$98765432109876543210/12345678901234567890.$$

Lösung.
- ∘ 1111111110111111111100,
- ∘ $121932631137021795223746380111263526900$,
- ∘ $\dfrac{109739369}{13717421}$. ◯

(ii) Berechne (nach Einsetzen Deiner Matrikelnummer):

```
> matrikel := .......;
> matrikel mod 1000;
> matrikel^2 mod 1000;
> (matrikel mod 1000)^2;
> (matrikel mod 1000)^2 mod 1000;
> matrikel &^ 2 mod 1000;
```

Bemerkung: Die MAPLE-Operation `mod` kennst Du aus der Vorlesung unter dem Namen rem.

Lösung. Die Lösungen wurden mit der Matrikelnummer 3358245 berechnet:

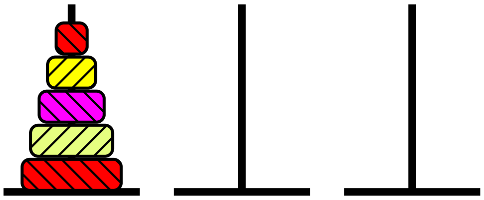
- ∘ 245,
- ∘ 25,
- ∘ 60025,
- ∘ 25,
- ∘ 25. ◯

(iii) Gib die ersten fünf Dezimalziffern von $1012!$ und den Rest von $1012!$ bei Division durch 1013 an. [*Bemerkung*: Die Fakultät von n, kurz $n!$, sprich „n Fakultät", ist das Produkt der ersten n Zahlen, also $n! = \prod_{1\leq k\leq n} k = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$. MAPLE versteht das Ausrufezeichen als Fakultätszeichen.]

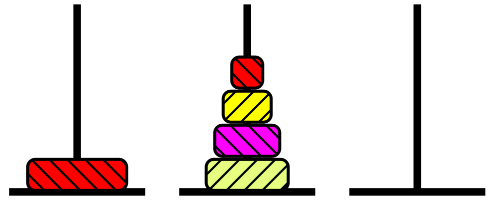
Lösung. Die ersten fünf Dezimalziffern sind 43488 und der Rest der Division ist 1012. ◯

Aufgabe 5.2 (Induktion, Kinderspiel). (5 Punkte)

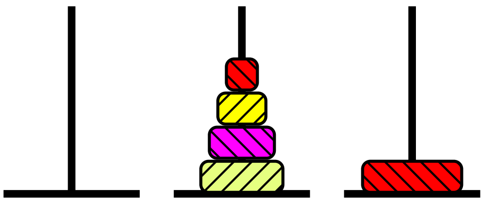
Bei diesem Spiel ist die Aufgabe, eine fest vorgebene Anzahl unterschiedlich großer Scheiben von dem linken auf den rechten von drei Stäben zu bewegen, wobei der mittlere Stab als Hilfsstab zur Verfügung steht. Dabei darf immer nur eine Scheibe bewegt und niemals eine größere auf eine kleinere Scheibe gelegt werden. Eine einfache Idee reduziert das Problem für n Scheiben auf das für $n-1$ Scheiben:



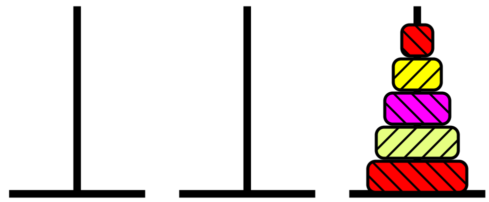
1. Ausgangsituation



2. Bewege zunächst $n-1$ Scheiben auf den Hilfsstab. Benutze den Zielstab als Hilfsstab.



3. Bewege die größte Scheibe vom Startstab zum Zielstab.



4. Bewege $n-1$ Scheiben vom Hilfsstab zum Zielstab. Benutze den Startstab als Hilfsstab.

Dies liefert uns einen rekursiven Algorithmus:

Algorithmus. Kinderspiel.

Eingabe: Anzahl Scheiben n, drei Stäbe „Start", „Hilf", „Ziel".

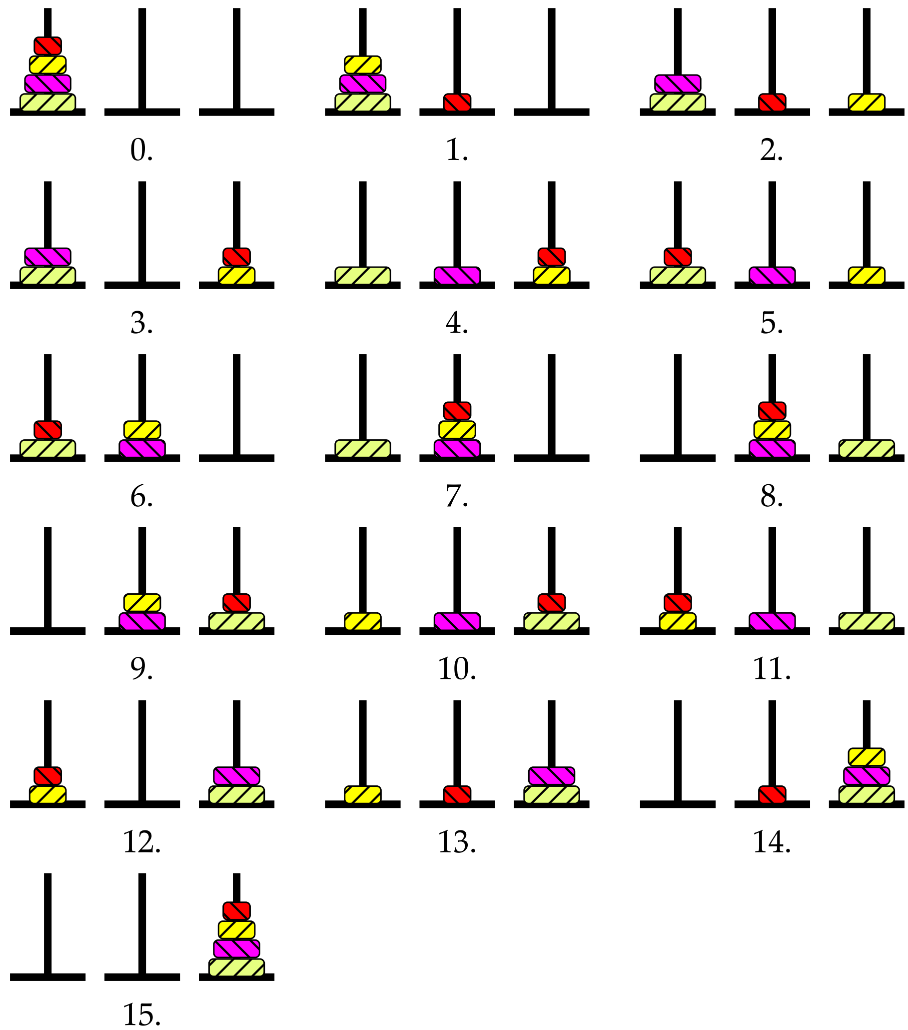
1. If $n > 0$ then
2. Kinderspiel($n-1$, „Start", „Ziel", „Hilf").
3. Versetze eine Scheibe von „Start" nach „Ziel".
4. Kinderspiel($n-1$, „Hilf", „Start", „Ziel").

(i) Führe den Algorithmus für $n = 1, 2, 3, 4$ von Hand aus, z.B. mit Münzen, und zähle jeweils die Anzahl Scheibenbewegungen.

Lösung.
- Anzahl Bewegungen für $n = 1$: 1,
- Anzahl Bewegungen für $n = 2$: 3,
- Anzahl Bewegungen für $n = 3$: 7,
- Anzahl Bewegungen für $n = 4$: 15.

(ii) Illustriere die Ausführung des Algorithmus für $n = 4$.

Lösung.



◯

(iii) Für $n \in \mathbb{N}$ sei T_n die Anzahl der Scheibenbewegungen, die der Algorithmus für n Scheiben benötigt. Zeige, dass $T_0 = 0$ und $T_n = 2 \cdot T_{n-1} + 1$ für $n \geq 1$ ist.

Lösung.

- Wenn man 0 Scheiben hat, dann braucht man auch nur 0 Bewegungen, um alle Scheiben vom Startstab zum Zielstab zu bewegen.
- Der rekursive Algorithmus und das zugehörige Bild zeigen uns, dass man, um n Scheiben im Sinne der Aufgabe zu bewegen, zweimal $n-1$ Scheiben bewegen muß und einmal die n-te Scheibe, somit:

$$T_n = 2 \cdot T_{n-1} + 1.$$

◯

(iv) Zeige, dass der Algorithmus für n Scheiben ($n \in \mathbb{N}$) genau $2^n - 1$ Scheibenbewegungen benötigt.

Lösung. Dieser Teil der Aufgabe soll natürlich mit vollständiger Induktion gelöst werden:

Induktionsanfang mit $n = 0$: $0 = T_0 \stackrel{?}{=} 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$.

Induktionsschritt: $n \to n + 1$

$$\begin{aligned} T_{n+1} &\stackrel{\text{(iii)}}{=} 2 \cdot T_n + 1 \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} 2 \cdot (2^n - 1) + 1 \\ &= 2^{n+1} - 2 + 1 \\ &= 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 5.3 (Verschlüsseln). (4 Punkte)

(i) Trage die ersten bis zu acht Zeichen Deines Vornamens — exakt so, wie Du ihn in „Mein Konto“ eingegeben hast — in eine Tabelle ein und lies die ASCII-Werte paarweise(!) als Zahlen zur Basis 256, so wie im folgenden Beispiel. Ergänze am Ende mit Leerzeichen auf acht Zeichen, falls nötig.

Buchstabe	K	a	t	h	r	i	n	␣
ASCII-Wert	75	97	116	104	114	105	110	32
Zahl eines Paars	19297		29800		29289		28192	

(ii) Das Verschlüsselungsverfahren von Cäsar ersetzt jeden Buchstaben durch seinen dritten Nachfolger. Tu dies bezogen auf die ASCII-Codierung mit Deinem Vornamen. Gib das Ergebnis als Liste von ASCII-Werten und als Text an.

Lösung.

ASCII-Wert mit Cäsar	78	100	119	107	117	108	113	35
Entsprechender Buchstabe	N	d	w	k	u	l	q	#

(iii) Das Verschlüsselungsverfahren von Rabin ersetzt im wesentlichen jede Eingabe durch ihr Quadrat. Berechne für die Paarzahlen jeweils das Quadrat und dessen Rest bei Division durch 66013. Stelle die Ergebnisse der Divison mit Rest wieder als ASCII-Paare und als Text dar.

Lösung.

<table>
<tr><td>Quadratzahl eines Paars</td><td colspan="2">372374209</td><td colspan="2">888040000</td><td colspan="2">857845521</td><td colspan="2">794788864</td></tr>
<tr><td>Quadratzahl rem 66013</td><td colspan="2">60889</td><td colspan="2">33124</td><td colspan="2">6586</td><td colspan="2">58357</td></tr>
<tr><td>Zugehöriger ASCII-Wert</td><td>237</td><td>217</td><td>129</td><td>100</td><td>25</td><td>186</td><td>227</td><td>245</td></tr>
<tr><td>Zugehöriges Zeichen</td><td>ϕ</td><td>┘</td><td>ü</td><td>d</td><td>EM</td><td>$\|$</td><td>π</td><td>⌡</td></tr>
</table>

Bemerkung: Tatsächlich kann man aus diesen Werten verhältnismäßig einfach auf die ursprünglichen Werte zurückschließen. (Ohne Probieren!)

Aufgabe 5.4 (Numerik). (4 Punkte)

(i) Berechne für die Zahlen 4711 und 4710 die normierte Dezimaldarstellung (Vorzeichen, Mantisse, Exponent) mit Mantissenlänge 3, 4 und 5.

Lösung.

3-stellig: $4711 \approx +0,471 \cdot 10^4$, $4710 \approx +0,471 \cdot 10^4$.

4-stellig: $4711 \approx +0,4711 \cdot 10^4$, $4710 \approx +0,4710 \cdot 10^4$.

5-stellig: $4711 \approx +0,47110 \cdot 10^4$, $4710 \approx +0,47100 \cdot 10^4$.

Berechne mit 3-, 4- und 5-stelliger dezimaler Genauigkeit die Ausdrücke

(ii) $a := 4711^4 - 4710^4$.

Lösung.

3-stellig:

$$a \approx 4710^4 - 4710^4 = 0.$$

4-stellig: Wir berechnen zunächst die Quadrate der angegebenen Zahlen und bringen diese auf die erlaubte Genauigkeit:

- $4711^2 = 22\,193521 \approx 22\,190000$,

- $4710^2 = 22\,184100 \approx 22\,180000$.

Das einfachste ist jetzt, die Quadrate wieder zu quadrieren:

- $22\,190000^2 = 492\,396100\,000000 \approx 492\,400000\,000000$,
- $22\,180000^2 = 491\,952400\,000000 \approx 492\,000000\,000000$.

Das Ergebnis ist dann insgesamt: $a = 4711^4 - 4710^4 \approx 400000\,000000$. Man kann die Werte aber auch anders berechnen. Wenn man den Rechenweg $w(a) = (((a \cdot a) \cdot a) \cdot a)$ benutzt, erhält man

- $w(4711) \approx 492\,300000\,000000$,
- $w(4710) \approx 492\,200000\,000000$.

Und damit ein anderes Endergebnis: $a = 4711^4 - 4710^4 \approx 100000\,000000$.

5-stellig: Wir berechnen auch hier zunächst die Quadrate der angegebenen Zahlen und bringen diese auf die erlaubte Genauigkeit:

- $4711^2 = 22\,193521 \approx 22\,194000$,
- $4710^2 = 22\,184100 \approx 22\,184000$.

Das einfachste ist jetzt, die Quadrate wieder zu quadrieren:

- $22194000^2 = 492\,573636\,000000 \approx 492\,570000\,000000$,
- $22184000^2 = 492\,129856\,000000 \approx 492\,130000\,000000$.

Das Ergebnis ist dann insgesamt: $a = 4711^4 - 4710^4 \approx 440000\,000000$. Wenn man den Rechenweg $w(a) = (((a \cdot a) \cdot a) \cdot a)$ benutzt, erhält man

- $w(4711) \approx 492\,580000\,000000$,
- $w(4710) \approx 492\,150000\,000000$.

Und damit ein anderes Endergebnis: $a = 4711^4 - 4710^4 \approx 430000\,000000$.

Exakt:

$$a = 492\,552374\,377441 - 492\,134292\,810000 = 418081\,567441$$ ○

(iii) $b := 4711^3 + 4711^2 \cdot 4710 + 4711 \cdot 4710^2 + 4710^3$.

Lösung.

3-stellig: $b = 420000\,000000$.

4-stellig: $b = 418000\,000000$.

5-stellig: $b = 418090\,000000$.

Exakt: $b = 418081\,567441$. ◯

(iv) $c := a - b$.

Lösung.

3-stellig: $c = a - b = 0 - 420000\,000000 = -420000\,000000$.

4-stellig: $c = a - b = 400000\,000000 - 417800\,000000 = -18000\,000000$. (Oder aber mit dem anderen Rechenweg: $-318000\,000000$.)

5-stellig: $c = a - b = 440000\,000000 - 418090\,000000 = 21910\,000000$. (Oder aber mit dem anderen Rechenweg: $11910\,000000$.)

Exakt: $c = a - b = 418081\,567441 - 418081\,567441 = 0$. ◯

Berechne beide Ausdrücke exakt. Erkläre Deine Beobachtungen.

Lösung. Bei den geringeren Genauigkeiten entstehen durch Auslöschung grobe Fehler, denn eigentlich sind die beiden Ausdrücke ja gleich (s. exakte Berechnung). Aber wieso eigentlich? Die Gleichung

$$x^4 - y^4 = (x - y) \cdot (x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$$

ist ganz leicht nachzuprüfen. Ist nun $x = 4711$ und $y = 4710$, steht da $a = 1 \cdot b$. ◯