4. Musterlösung zu Mathematik für Informatiker I, WS 2003/04

KATHRIN TOFALL, MICHAEL NÜSKEN

Einige Aufgaben werden von den Ziffern Deiner Matrikelnummer abhängen. Dazu bezeichne die Ziffern Deiner Matrikelnummer mit m_6, m_5, m_4, m_3, m_2, m_1, m_0, sodass also $\sum_{j=0}^{6} m_j 10^j$ Deine Matrikelnummer ist. Trage Deine Matrikelnummer hier ein, um ganz einfach Deine persönlichen Ziffern abzulesen.

m_6	m_5	m_4	m_3	m_2	m_1	m_0
3	3	5	8	2	4	5

Aufgabe 4.1 (Logik). (2 Punkte)

Sei a eine (unbekannte) reelle Zahl. Bestimme den Wahrheitswert:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \mathrm{e}^{m_1+ax} - (x-m_4)^2 > 0 \iff \forall y \in \mathbb{R}\colon\ \mathrm{e}^{m_1+ay} - (y-m_4)^2 > 0.$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \mathrm{e}^{a(x-m_2)} - (x-am_6)^2 > 0 \iff \forall y \in \mathbb{R}\colon\ \mathrm{e}^{a(y-m_2)} - (y-am_6)^2 \le 0.$

(iii) $\exists x \in \mathbb{R}\colon\ \mathrm{e}^{a\sin x} - (m_0x-a)^2 < 0 \iff \exists y \in \mathbb{R}\colon\ \mathrm{e}^{a\sin y} - (m_0y-a)^2 < 0.$

(iv) $\exists x \in \mathbb{R}\colon\ \mathrm{e}^{a\sin x} - (m_0x-a)^2 < 0 \iff \exists y \in \mathbb{R}\colon\ \mathrm{e}^{a\sin x} - (m_0x-a)^2 < 0.$

Lösung. (i) Wahr, es handelt sich zweimal um dieselbe Aussage, nur der Platzhalter heisst links x und rechts y.

(ii) Eigentlich dachten wir, dies sei falsch, weil der Ausdruck $\mathrm{e}^{a(x-m_2)} - (x-am_6)^2$ nicht gleichzeitig immer positiv *und* immer nicht-positiv sein kann. Aber das ist falsch gedacht. Richtig ist Folgendes:

Die Aussage ist wahr, denn der Ausdruck $\mathrm{e}^{a(x-m_2)} - (x-am_6)^2$ nimmt unabhängig von a, m_2 und m_6 immer beide Vorzeichen an: Im Fall $a = 0$ ist der Ausdruck für $x = am_6$ positiv und für x sehr groß wird er negativ. Im Fall $a > 0$ wird der Ausdruck für sehr große x positiv und für sehr stark negative x (also $-x$ sehr groß) negativ. Im Fall $a < 0$ ist es gerade umgekehrt wie im Fall $a > 0$. Damit sind tatsächlich beide Seiten der Aussage falsch und damit äquivalent.

(iii) Wahr, es handelt sich zweimal um dieselbe Aussage, nur der Platzhalter heisst links x und rechts y.

(iv) Eigentlich dachten wir, die Aussage sei falsch, denn die rechte Aussage hängt von x ab, die linke aber nicht. Aber das ist wieder zu kurz gedacht.

Der Quantor $\exists y \in \mathbb{R}$ hat keinerlei Wirkung und wir können ihn weglassen. Da rechts die Variable x nicht quantifiziert ist, muss die Aussage für alle x gelten. Nach einer Namensänderung haben wir also die Aussage

$$\forall z \in \mathbb{R}\colon \left(\exists x \in \mathbb{R}\colon\ \mathrm{e}^{a \sin x} - (m_0 x - a)^2 < 0 \iff \mathrm{e}^{a \sin z} - (m_0 z - a)^2 < 0\right)$$

zu betrachten. Wenn nun der Ausdruck $\mathrm{e}^{a \sin z} - (m_0 z - a)^2$ immer negativ ist, dann sind beide Seiten der Äquivalenz richtig: die linke ohnehin und die rechte unabhängig davon, welches z wir betrachten. Ist der Ausdruck immer positiv oder Null, so gibt es kein geeignetes x und die linke Seite der Äquivalenz ist falsch. Aber auch die rechte Seite ist unabhängig von z falsch. Damit ist die Aussage richtig. Nimmt der Ausdruck beide Vorzeichen an, so können wir ein z finden, dass ihn positiv oder Null macht und ein x, welches ihn negativ macht, und damit ist die Äquivalenz falsch. Kurz, die Aussage ist äquivalent zur Aussage:

Der Ausdruck $d(z) := \mathrm{e}^{a \sin z} - (m_0 z - a)^2$ nimmt entweder nur Werte kleiner Null an oder nur Werte größer oder gleich Null.

Dies hängt nun von den Parametern ab. Wir betrachten einige Fälle:

$m_0 = 0$, $a = 0$: Nun ist $d(z) = 1$. Das ist immer positiv und damit ist die Aussage wahr.

$m_0 = 0$, $a \neq 0$: Nun ist $d(z) = \mathrm{e}^{a \sin z} - a^2$. Die extremen Werte sind also $d(\frac{\pi}{2}) = \mathrm{e}^{a} - a^2$ und $d(\frac{3\pi}{2}) = \mathrm{e}^{-a} - a^2$. Die Aussage ist also äquivalent zu $\mathrm{e}^{a} - a^2 < 0 \iff \mathrm{e}^{-a} - a^2 < 0$. Das ist äquivalent zu $|a| \leq A \approx 0,70346\ldots$, wobei A die einzige reelle Lösung von $\mathrm{e}^{-A} = A^2$ ist.

$m_0 \neq 0$, $a = 0$: Nun ist $d(z) = 1 - m_0^2 z^2$ und dieser Ausdruck nimmt beide Vorzeichen an. Somit ist die Aussage falsch.

$m_0 \neq 0$, $a \neq 0$: In diesem Fall nimmt d beide Vorzeichen an: Einerseits ist $d(\frac{a}{m_0}) = \mathrm{e}^{a \sin \frac{a}{m_0}} > 0$. Andererseits ist d für sehr große Werte von z negativ, weil der erste Term höchstens $\mathrm{e}^{|a|}$ werden kann. In diesem Fall ist die Aussage also falsch.

Kurz: wenn $m_0 = 0$ ist, dann ist die Aussage äquivalent zu $|a| \leq A \approx 0,70346\,74224\,98391\,65204\,98186\ldots$. Andernfalls ist die Aussage falsch.

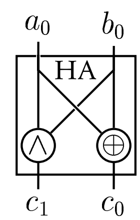
Wie ihr hoffentlich richtig gemutmaßt habt, waren die Schwierigkeiten in (ii) und (iv) nicht beabsichtigt, weshalb wir die Teile dann auch nicht in die Wertung genommen haben. ◯

Aufgabe 4.2 (Binäraddierer). (12 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist ein Algorithmus für die binäre Addition. Die binäre Addition läuft genauso ab, wie eine schriftliche Addition in der Schule nur eben zur Basis 2 anstatt zur Basis 10. Man beginnt mit den beiden Bits ganz rechts und addiert diese. Das niederwertige Bit des Ergebnisses schreiben wir auf, das höherwertige nehmen wir als Übertrag mit in die nächste Spalte (zur Linken). Dort müssen dann drei Bits addiert werden. Wieder wird das niederwertige Bit der Summe als Ergebnis aufgeschrieben und das höherwertige als Übertrag …

(i) Für $k = 1$ erhalten wir einen Halbaddierer, der aus zwei einzelnen Bits a_0 und b_0 zwei Bits c_1 und c_0 berechnet mit $c_1 \cdot 2 + c_0 = a_0 + b_0$. Entwirf einen Algorithmus, der diese zwei Bits berechnet. Verwende dazu nur die Operationen $\wedge$, $\vee$, $\neg$ und $\oplus$.

Lösung.



Algorithmus. Halbaddierer.

Eingabe: Bits a_0 und b_0.
Ausgabe: Bits c_0 und c_1 mit $a_0 + b_0 = c_1 \cdot 2 + c_0$.

1. $c_0 \leftarrow a_0 \oplus b_0$.
2. $c_1 \leftarrow a_0 \wedge b_0$.
3. Return (c_1, c_0).

○

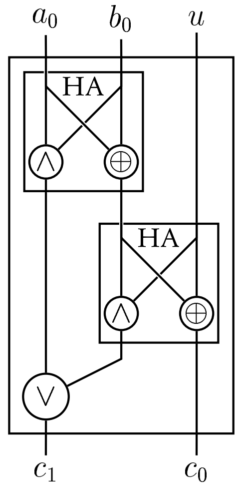
(ii) Entwirf einen Algorithmus, der drei Bits a_0, b_0 und u addiert und zwei Bits c_1 und c_0 berechnet mit $c_1 \cdot 2 + c_0 = a_0 + b_0 + u$. Verwende dazu nur die Operationen $\wedge$, $\vee$, $\neg$ und $\oplus$ und Halbaddierer. (Dies bzw. einen entsprechenden Schaltkreis nennt man dann einen Volladdierer.)

Lösung. Die praktisch orientierte Lösung verwendet zwei Halbaddierer:

Algorithmus. Volladdierer.

Eingabe: Bits a_0, b_0 und u.
Ausgabe: Bits c_0 und c_1 mit $a_0 + b_0 + u = c_1 \cdot 2 + c_0$.

1. $(v_1, v_0) \leftarrow$ Halbaddierer(a_0, b_0).
2. $(w_1, c_0) \leftarrow$ Halbaddierer(v_0, u).
3. $c_1 \leftarrow v_1 \vee w_1$.
4. Return (c_1, c_0).



Alternativ könnte man auch direkt $c_0 \leftarrow a_0 \oplus b_0 \oplus u$ und $c_1 \leftarrow a_0 \wedge b_0 \vee b_0 \wedge u \vee u \wedge a_0$ ausrechnen.

(iii) Entwirf einen vollwertigen Algorithmus zur Addition zweier Binärzahlen:

Algorithmus. Binäre Addition.

Eingabe: Eine natürliche Zahl k und Listen $a = (a_{k-1}, \ldots, a_0)$, $b = (b_{k-1}, \ldots, b_0)$ mit $a_i, b_i \in \{0, 1\}$.

Ausgabe: Eine Liste $c = (c_k, c_{k-1}, \ldots, c_0)$ mit $c_i \in \{0, 1\}$ und $\sum_{0 \le i \le k} c_i 2^i = \sum_{0 \le i \le k-1} a_i 2^i + \sum_{0 \le i \le k-1} b_i 2^i$.

1. …
2. For $i = 0$ to $k - 1$ do 3–6
3.   …
⋮   …
6.   …
7. …
⋮ …
10. Return $c = (c_k, c_{k-1}, \ldots, c_0)$.

Verwende dazu nur die Operationen $\wedge$, $\vee$, $\neg$ und $\oplus$ und Volladdierer. In einer Schleife soll ein Zwischenergebnis $u 2^{i+1} + \sum_{0 \le j \le i} c_j 2^j$ berechnet werden, dass die Summe der unteren k Bits von a und b darstellt; formuliere die genaue Bestimmungsgleichung.

Lösung. **Algorithmus.** Binäre Addition.

Eingabe: Eine natürliche Zahl k und Listen $a = (a_{k-1}, \ldots, a_0)$, $b = (b_{k-1}, \ldots, b_0)$ mit $a_i, b_i \in \{0, 1\}$.

Ausgabe: Eine Liste $c = (c_k, c_{k-1}, \ldots, c_0)$ mit $c_i \in \{0,1\}$ und $\sum_{0 \le i \le k} c_i 2^i = \sum_{0 \le i \le k-1} a_i 2^i + \sum_{0 \le i \le k-1} b_i 2^i$.

1. $u_0 \leftarrow 0$.
2. For $i = 0$ to $k-1$ do 3–3
3. $\quad (u_{i+1}, c_i) \leftarrow \text{Volladdierer}(a_i, b_i, u_i)$.
4. $c_k \leftarrow u_k$.
5. Return c.

Die Bestimmungsgleichung ist dann:

$$\forall 0 \le i \le k-1 : u_{i+1} 2^{i+1} + \sum_{0 \le j \le i} c_j 2^j = \sum_{0 \le j \le i} a_j 2^j + \sum_{0 \le j \le i} b_j 2^j. \qquad \bigcirc$$

(iv) Zeige, dass Dein Algorithmus korrekt arbeitet. Verwende dabei die Bestimmungsgleichung als Schleifeninvariante.

Lösung. Wir beweisen zuerst, dass die Bestimmungsgleichung nach jedem Schleifendurchlauf erfüllt ist:

Behauptung.

$$\forall 0 \le i \le k : u_{i+1} 2^{i+1} + \sum_{0 \le j \le i} c_j 2^j = \sum_{0 \le j \le i} a_j 2^j + \sum_{0 \le j \le i} b_j 2^j.$$

Beweis. Induktionsanfang $i = 0$:

$$u_1 \cdot 2 + c_0 = a_0 + b_0.$$

Induktionsschritt $i-1 \to i$, $i < k$:

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \le j \le i} a_j 2^j + \sum_{0 \le j \le i} b_j 2^j &= \sum_{0 \le j \le i-1} a_j 2^j + \sum_{0 \le j \le i-1} b_j 2^j + a_i 2^i + b_i 2^i \\
&\overset{\text{IV}}{=} u_i 2^i + \sum_{0 \le j \le i-1} c_j 2^j + a_i 2^i + b_i 2^i \\
&= \underbrace{(u_i + a_i + b_i)}_{=u_{i+1} \cdot 2 + c_i} 2^i + \sum_{0 \le j \le i-1} c_j 2^j \\
&= u_{i+1} \cdot 2^{i+1} + c_i 2^i + \sum_{0 \le j \le i-1} c_j 2^j \\
&= u_{i+1} 2^{i+1} + \sum_{0 \le j \le i} c_j 2^j
\end{aligned}$$

Damit ist die Bestimmungsgleichung bewiesen, der Algorithmus arbeitet korrekt. $\square$

Die Behauptung für $i = k - 1$ zeigt, dass die Ausgabe des Algorithmus das gewünschte Ergebnis liefert:

$$\begin{aligned} \sum_{0\le j\le k-1} a_j 2^j + \sum_{0\le j\le k-1} b_j 2^j &= u_k 2^{i+1} + \sum_{0\le j\le k-1} c_j 2^j \\ &\overset{c_k=u_k}{=} \sum_{0\le j\le k} c_j 2^j \end{aligned}$$

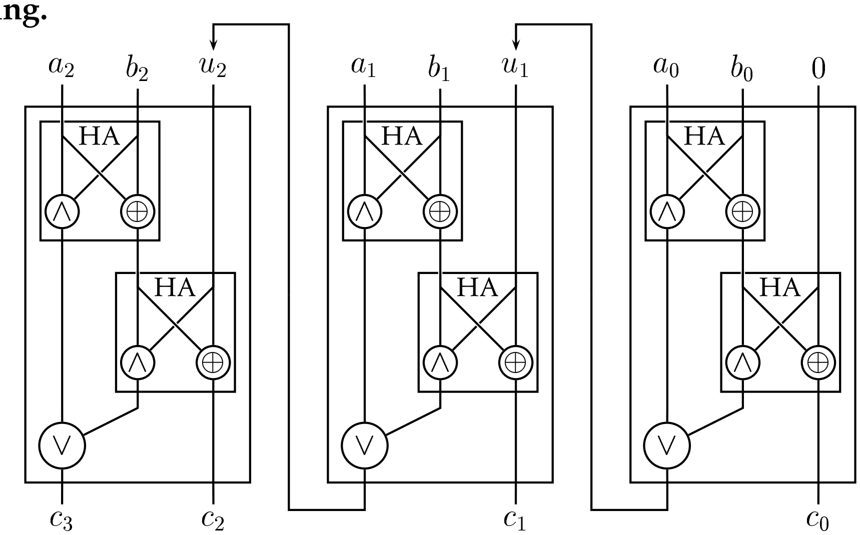
Dass der Laufindex hier j statt i heisst, spielt — wie wir spätestens seit der Lösung von Aufgabe 4.1 wissen — keine Rolle.

(v) Bestimme die Laufzeit Deines Algorithmus. [Es soll die Anzahl der eigentlichen logischen Operationen gezählt werden, die Schleifenkontrollen vernachlässigen wir.]

Lösung. Unser Algorithmus benutzt pro Schleifendurchlauf zweimal $\oplus$, einmal $\vee$ und zweimal $\wedge$. Insgesamt also fünf logische Operationen. Da die Schleife k-mal durchlaufen wird und es sonst keinerlei logische Operationen in dem Algorithmus gibt, ist die Laufzeit insgesamt: $5k$.

(vi) Zeichne einen entsprechenden Schaltkreis für $k = 3$.

Lösung.



Aufgabe 4.3 (Quantoren). (2 Punkte)

Sei $\varphi(x)$ ein logischer Ausdruck, der von x abhängt. Drücke die Aussage „Es gibt genau ein x mit der Eigenschaft $\varphi(x)$." durch den Allquantor $\forall$ und die logischen Operationen $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ sowie das Gleichheitszeichen $=$ aus.

Lösung.

$$(\neg\forall x : \neg\varphi(x)) \wedge \Big(\forall x \forall y : \varphi(x) \wedge \varphi(y) \;\Rightarrow\; x = y\Big)$$

○

Aufgabe 4.4 (Logarithmen). (2 Punkte)

(i) Stelle für $a > 0$ die Lösung y der Gleichung $7^a = 2^y$ durch Logarithmen dar.

Lösung. Logarithmieren von $7^a = 2^y$ liefert $a \log_2 7 = y \log_2 2$, also $y = a \log_2 7$. ○

(ii) Drücke den Logarithmus von x zur Basis 7 durch Logarithmen zur Basis 2 aus.

Lösung. Sei $a = \log_7 x$ und $y = \log_2 x$. Dann ist $7^a = x$ und $2^y = x$. Mit (i) folgt $\log_2 x = y = a \log_2 7 = \log_7 x \cdot \log_2 7$ oder

$$\log_7 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 7}.$$

○

Aufgabe 4.5 (Komplexe Zahlen). (3 Punkte)

(i) Berechne $(m_3 + 1 + im_1)(m_6 - im_1)$.

(ii) Berechne $(m_3 + 1 + im_1)/(m_6 + im_1)$.

(iii) Berechne den Betrag von $(m_5 + 2) - 3i(m_1 + 1)$.

Lösung. Alle Lösungen sind mit der Matrikelnummer 3358245 berechnet:

(i) $(9 + 4i)(3 - 4i) = 43 - 24i$.

(ii) $(9 + 4i)/(3 + 4i) = \dfrac{(9 + 4i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \dfrac{1}{25}(43 - 24i)$.

(iii) $\sqrt{(3 + 2)^2 + (3 \cdot (4 + 1))^2} = 5 \cdot \sqrt{1 + 3^2} = 5 \cdot \sqrt{10}$. ○

Aufgabe 4.6 (Stellenwertsysteme). (5 Punkte)

Besonders in der Informatik sind Stellensysteme zu anderen Basen als 10 gebräuchlich und sehr wichtig. Für die Basis 16 verwenden wir die Buchstaben $a, \dots, f$ für die hexadezimalen Ziffern(!) $10, \dots, 15$. Somit ist die hexadezimale Zahl $(ff)_{16}$ die Dezimalzahl 255, nämlich $15 \cdot 16 + 15$.

(i) Stelle Deine Matrikelnummer dezimal, hexadezimal, oktal, 3-adisch und binär dar.

Lösung. Auch hier bezieht sich die angegebene Lösung wieder auf die Matrikelnummer 3358245.

- Hexadezimale Darstellung: $333e25$.
- Oktale Darstellung: 14637045.
- 3-adische Darstellung: 20022121122110.
- Binäre Darstellung: 1100110011111000100101.

○

(ii) Berechne (schriftlich und ohne Taschenrechner) hexadezimal $(92a782)_{16}+(b7a10f)_{16}$.

Lösung.

$$\begin{array}{ccccccc} & 9 & 2 & a & 7 & 8 & 2 \\ & b & 7 & a & 1 & 0 & f \\ {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 1} & & & {\scriptstyle 1} & \\ \hline 1 & 4 & a & 4 & 8 & 9 & 1 \end{array}$$

○

(iii) Berechne (schriftlich und ohne Taschenrechner) oktal $(626053)_8 \cdot (26745)_8$.

Lösung.

$$\begin{array}{ccc|r} 626053 & \cdot & 5 \cdot 8^0 & 3756327 \\ 626053 & \cdot & 4 \cdot 8^1 & 3130254 \\ 626053 & \cdot & 7 \cdot 8^2 & 5432455 \\ 626053 & \cdot & 6 \cdot 8^3 & 4604402 \\ 626053 & \cdot & 2 \cdot 8^4 & 1454126 \\ & & & {\scriptstyle 1\,2\,1\,1\,2\,2\,2\,1} \\ \hline 626053 & \cdot & 26745 & 22146410567 \end{array}$$

○

(iv) Wandle die Binärzahl $(1001\,0110\,1001\,0110\,0110\,1001)_2$ ins Dezimalsystem um.

Lösung. $(1001\,0110\,1001\,0110\,0110\,1001)_2 = 9868905.$ ○

(v) Wandle die Binärzahl $(1001\,0110, 1001\,0110\,0110\,1001)_2$ ins Dezimalsystem um. (Achtung, da ist ein Komma drin!)

Lösung.

$$\begin{aligned}(1001\,0110, 1001\,0110\,0110\,1001)_2 &= \frac{9868905}{65536} = 150\frac{38505}{65536} \\ &= 150, 58753\,96728\,51562\,5.\end{aligned}$$ ○