# 3. Musterlösung zu Mathematik für Informatiker I, WS 2003/04

Kathrin Tofall

**Aufgabe 3.1** (Logische Aussagen). (4 Punkte)

Verneine folgende Aussagen und vereinfache die Negation. Bestimme den Wahrheitswert der ursprünglichen und negierten Aussagen (oder erläutere).

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ x^2 \geq 0$.

**Lösung.** Die Verneinung ist: $\exists x \in \mathbb{R}\colon\ x^2 < 0$. Die Aussage war richtig, jedes Quadrat einer reellen Zahl ist größer oder gleich Null, die Verneinung ist somit falsch. ◯

(ii) $\exists z \in \mathbb{C}\colon\ \forall x \in \mathbb{R}\colon\ |z| > x$.

**Lösung.** Die Verneinung ist: $\forall z \in \mathbb{C}\colon\ \exists x \in \mathbb{R} : |z| \leq x$. Die Aussage war falsch, es gibt keine komplexe Zahl $z$, deren Betrag größer ist als jede reelle Zahl. Die Verneinung ist hingegen wahr, zu jeder komplexen Zahl $z$ existiert eine reelle Zahl $x$, die gleich dem Betrag von $z$ oder größer ist. ◯

(iii) $\forall s \in$ MFI1: $\exists p \in \{$Pizzen$\}$ : $s$ bekommt von $p$.

**Lösung.** Die Verneinung ist in diesem Fall: $\exists s \in$ MFI1: $\forall p \in \{$Pizzen$\}$ : $s$ bekommt nichts von $p$. Die ursprüngliche Aussage bedeutet, dass für alle Studenten der Vorlesung eine Pizza existiert, von der sie etwas abbekommen. Diese Aussage sollte wahr sein (außer irgendjemand will vielleicht gar nichts abbekommen etc.). Die Negierung bedeutet dann: Es existiert ein Student in der Vorlesung, der von keiner Pizza etwas abbekommt. Diese Aussage ist hoffentlich falsch. ◯

(iv) $\exists p \in \{$Pizzen$\}$ : $\forall s \in$ MFI1: $s$ bekommt von $p$.

**Lösung.** Die Verneinung für diese Aussage ist: $\forall p \in \{$Pizzen$\}$ : $\exists s \in$ MFI1: $s$ bekommt nichts von $p$. Die ursprüngliche Aussage bedeutet, dass eine Pizza existiert, von der alle Studenten der Vorlesung etwas abbekommen. Je nach dem, wie groß eine Pizza sein kann oder wie wenig schon als ‘Abbekommen’ gilt, kann diese Aussage als wahr oder falsch betrachtet werden. Die Negierung bedeutet dann: Für alle Pizzen $p$ existiert ein Student in der Vorlesung, der nichts von $p$ abbekommt. Auch hier ist ein Interpretationsspielraum gegeben! ◯

**Aufgabe 3.2** (Induktion, Fibonacci). (4 Punkte)

Die Fibonacci-Zahlen sind definiert durch

$$\begin{aligned} F_0 &:= 0, \\ F_1 &:= 1, \\ F_n &:= F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{für } n \geq 2. \end{aligned}$$

Sei jetzt $\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $\overline{\varphi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Zeige:

(i) $\varphi + \overline{\varphi} = 1$ und $\varphi \cdot \overline{\varphi} = -1$.

**Lösung.**

$$\begin{aligned} \varphi + \overline{\varphi} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = 1. \\ \varphi \cdot \overline{\varphi} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{4}{4} = -1. \end{aligned}$$

○

(ii) $\varphi^2 = \varphi + 1$ und $\overline{\varphi}^2 = \overline{\varphi} + 1$ (mit anderen Worten: $\varphi$ und $\overline{\varphi}$ sind die Nullstellen von $x^2 - x - 1$).

**Lösung.** Leicht zu sehen ist: $\varphi + \overline{\varphi} = 1 \Rightarrow \overline{\varphi} = 1 - \varphi$. Dann:

$$-1 = \varphi \cdot \overline{\varphi} = \varphi \cdot (1 - \varphi) = \varphi - \varphi^2.$$

Umstellen liefert nun $\varphi^2 = \varphi + 1$. Der Beweis für die zweite Aussage geht analog. ○

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$F_n = \frac{1}{5}\sqrt{5}\ \varphi^n - \frac{1}{5}\sqrt{5}\ \overline{\varphi}^n.$$

**Lösung.** Induktionsanfang: $n = 0$ und $n = 1$

$$\begin{aligned} 0 = F_0 &\overset{?}{=} \frac{1}{5}\sqrt{5}\,\varphi^0 - \frac{1}{5}\sqrt{5}\,\overline{\varphi}^0 = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{5} \cdot 1 - \frac{1}{5} \cdot \sqrt{5} \cdot 1 = 0 \\ 1 = F_1 &\overset{?}{=} \frac{1}{5}\sqrt{5}\,\varphi^1 - \frac{1}{5}\sqrt{5}\,\overline{\varphi}^1 = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) \\ &= \frac{1}{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1 \end{aligned}$$

Induktionsschritt: $n-1, n \to n+1$

$$\begin{aligned}
F_{n+1} &\overset{\text{Def. } F_{n+1}}{=} F_n + F_{n-1} \\
&\overset{\text{IV}}{=} \frac{1}{5}\sqrt{5}\cdot\varphi^n - \frac{1}{5}\sqrt{5}\cdot\overline{\varphi}^n + \frac{1}{5}\sqrt{5}\cdot\varphi^{n-1} - \frac{1}{5}\sqrt{5}\cdot\overline{\varphi}^{n-1} \\
&= \frac{1}{5}\sqrt{5}\left(\varphi^n + \varphi^{n-1} - \overline{\varphi}^n - \overline{\varphi}^{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{5}\sqrt{5}\left(\varphi^{n-1}\cdot(\varphi+1) - \overline{\varphi}^{n-1}\cdot(\overline{\varphi}+1)\right) \\
&\overset{\text{(ii)}}{=} \frac{1}{5}\sqrt{5}\left(\varphi^{n-1}\cdot\varphi^2 - \overline{\varphi}^{n-1}\cdot\overline{\varphi}^2\right) \\
&= \frac{1}{5}\sqrt{5}\left(\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}\right).
\end{aligned}$$

○

**Aufgabe 3.3** (Peano-Axiome). (4 Punkte)

In den Peano-Axiomen wird zunächst nur die Nachfolgerfunktion $n \mapsto n^+$ eingeführt. Die Addition kann dann durch die folgende Rekursion eingeführt werden:

$$\begin{aligned}
m + 0 &:= m, \\
m + n^+ &:= (m+n)^+
\end{aligned}$$

für $m, n \in \mathbb{N}$. Nun muss man allerdings die Gesetze der Addition überprüfen. Beweise $(m+n)+k = m+(n+k)$ für $m, n, k \in \mathbb{N}$.

**Lösung.** Mit der Eigenschaft

$$p(k) \equiv \left(\forall\, m, n \in \mathbb{N} : (m+n)+k = m+(n+k)\right).$$

führen wir eine Induktion nach $k$ durch.

Induktionsanfang: $k = 0$

$$(m+n)+0 = m+n = m+(n+0).$$

Induktionsschritt: $k \to k^+$

$$\begin{aligned}
(m+n)+k^+ &= ((m+n)+k)^+ \\
&\overset{\text{IV}}{=} (m+(n+k))^+ \\
&= m+(n+k)^+ \\
&= m+(n+k^+).
\end{aligned}$$

○

**Aufgabe 3.4** (Rational). (3 Punkte)

Beweise, dass $\sqrt{5}$ nicht rational ist.

**Lösung.** Wenn $\sqrt{5}$ rational wäre, dann würden $n, m \in \mathbb{Z}$ existieren mit

$$\sqrt{5} = \frac{m}{n}, \text{ also } \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5.$$

Wir nehmen deshalb an, dass solche $n, m \in \mathbb{Z}$ existieren und wählen diese so, dass der Bruch $\frac{m}{n}$ vollständig gekürzt ist.

Wir können dann umformen: $\frac{m^2}{n^2} = 5 \Leftrightarrow m^2 = 5n^2$. $m^2$ muss dann dezimal auf $0$ oder $5$ enden, also auch $m$. Damit kann $m$ in jedem Fall geschrieben werden als $m = 5 \cdot r$ mit $r \in \mathbb{Z}$. Wenn wir das jetzt einsetzen, erhalten wir:

$$5n^2 = (5r)^2 = 25r^2 \Rightarrow 5r^2 = n^2.$$

$n$ endet also genau wie $m$ auf $0$ oder $5$ und kann als $n = 5 \cdot s$ ($s \in \mathbb{Z}$) geschrieben werden. Also könnte aus dem Bruch $\frac{m}{n}$ noch mindestens eine $5$ herausgekürzt werden. Widerspruch zur Annahme. $\sqrt{5}$ kann nicht durch einen Bruch dargestellt werden, ist somit nicht rational. ◯

**Aufgabe 3.5** (Summen- und Produktzeichen). (7 Punkte)

(i) Berechne $\sum_{1 \leq j \leq 5} \frac{1}{j^2 - 2}$.

**Lösung.**

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j \leq 5} \frac{1}{j^2 - 2} &= \frac{1}{1^2 - 2} + \frac{1}{2^2 - 2} + \frac{1}{3^2 - 2} + \frac{1}{4^2 - 2} + \frac{1}{5^2 - 2} \\ &= -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{23} = -\frac{39}{161}. \end{aligned}$$

◯

(ii) Berechne $\sum_{0 \leq j \leq 7} (2j + 1)$.

**Lösung.**

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{0 \leq j \leq 7} (2j + 1) &= (2 \cdot 0 + 1) + (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 3 + 1) \\ &\quad + (2 \cdot 4 + 1) + (2 \cdot 5 + 1) + (2 \cdot 6 + 1) + (2 \cdot 7 + 1) \\ &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64. \end{aligned}$$

◯

(iii) Berechne $\sum_{0\le j\le 100}(2j+1)$.

**Lösung.**

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{0\le j\le 100}(2j+1) &= 2\cdot\sum_{0\le j\le 100} j + \sum_{0\le j\le 100} 1\\ &= 2\cdot\frac{100\cdot 101}{2} + 101\\ &= 10100 + 101 = 10201.\end{aligned}$$ ○

(iv) Berechne $\prod_{1\le k\le 5}(3k-9)$.

**Lösung.** Da der Term $3k-9$ auch für $k=3$ in das Produkt einfliessen soll, ist dieses Produkt $0$. ○

(v) Berechne $\prod_{1\le \ell\le 5}(3k-9)$. [Sic!]

**Lösung.** $\prod_{1\le \ell\le 5}(3k-9) = (3k-9)^5$ ○

(vi) Berechne $\prod_{0\le k\le 3}\sum_{0\le \ell<k}(2\ell-1)$.

**Lösung.** Für $k=2$ wird folgende Summe gebildet:

$$(2\cdot 0-1)+(2\cdot 1-1) = -1+1 = 0.$$

Damit ist auch hier ein Faktor des Produkts $0$, also das ganze Produkt. ○

(vii) Berechne $\sum_{0\le k\le 3}\prod_{0\le \ell<k}(2\ell-1)$.

**Lösung.**

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{0\le k\le 3}\prod_{0\le \ell<k}(2\ell-1) &= 1+(2\cdot 0-1)+(2\cdot 0-1)(2\cdot 1-1)\\ &\quad +(2\cdot 0-1)(2\cdot 1-1)(2\cdot 2-1)\\ &= 1+(-1)+(-1)\cdot 1+(-1)\cdot 1\cdot 3\\ &= 1+(-1)+(-1)+(-3) = -4.\end{aligned}$$ ○