2. Musterlösung zu Mathematik für Informatiker I, WS 2003/04

MICHAEL NÜSKEN, KATHRIN TOFALL

Aufgabe 2.1 (Schaltkreise). (4 Punkte)

Ein mehrziffriger Digitalzähler wird aus einzelnen Zählziffern aufgebaut. Für den Zählvorgang wird folgende Funktion gebraucht:

x_3	x_2	x_1	x_0	u	y_3	y_2	y_1	y_0
f	f	f	f	f	f	f	f	w
f	f	f	w	f	f	f	w	f
f	f	w	f	f	f	f	w	w
f	f	w	w	f	f	w	f	f
f	w	f	f	f	f	w	f	w
f	w	f	w	f	f	w	w	f
f	w	w	f	f	f	w	w	w
f	w	w	w	f	w	f	f	f
w	f	f	f	f	w	f	f	w
w	f	f	w	w	f	f	f	f

(i) Gib jeweils einen logischen Ausdruck für u, y_3, y_2, y_1 und y_0 an.

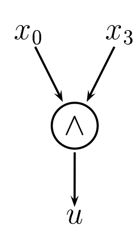
Lösung.

- $u \equiv x_3 \wedge x_0$
- $y_3 \equiv (x_3 \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_0) \vee (x_2 \wedge x_1 \wedge x_0)$
- $y_2 \equiv (x_0 \wedge x_1) \oplus x_2 \equiv (x_0 \wedge x_1 \wedge \neg x_2) \vee ((\neg x_0 \vee \neg x_1) \wedge x_2)$
- $y_1 \equiv x_1 \oplus (x_0 \wedge \neg x_3) \equiv (\neg x_0 \wedge x_1) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_0 \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_3)$
- $y_0 \equiv \neg x_0$ ○

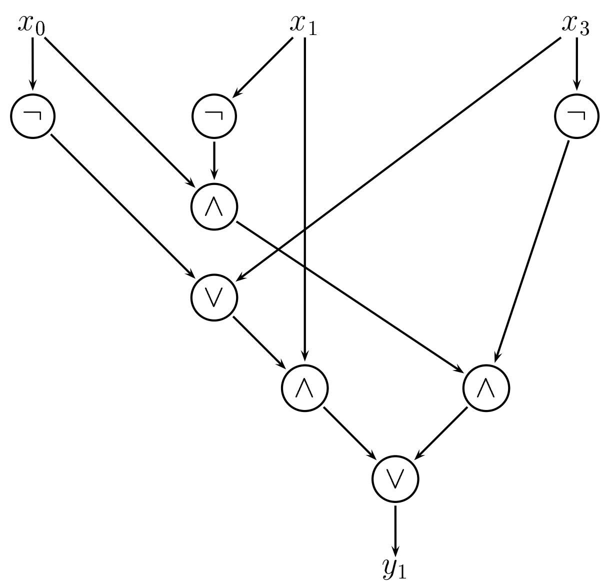
(ii) Zeichne je einen Schaltkreis für drei der Bits, der nur die Gatter $\neg$, $\vee$ und $\wedge$ verwendet.

Lösung.

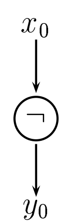
- Schaltkreis für u:



- Schaltkreis für y_1:



- Schaltkreis für y_0:



(iii) Was tut diese Funktion?

Lösung. Sie zählt binär hoch. Wir gucken uns mal die Wahrheitstabelle etwas verändert an:

$(x)_2$	x_3	x_2	x_1	x_0	u	y_3	y_2	y_1	y_0	$(y)_2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	2
2	0	0	1	0	0	0	0	1	1	3
3	0	0	1	1	0	0	1	0	0	4
4	0	1	0	0	0	0	1	0	1	5
5	0	1	0	1	0	0	1	1	0	6
6	0	1	1	0	0	0	1	1	1	7
7	0	1	1	1	0	1	0	0	0	8
8	1	0	0	0	0	1	0	0	1	9
9	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0

In dieser Tabelle ist jetzt f durch 0 und w durch 1 ersetzt. Außerdem steht in den äußeren Spalten der Dezimalwert der inneren binären Darstellung, bezeichnet mit $(x)_2$, bzw. $(y)_2$. u ist der „dezimale" Übertrag.

Wenn die 9 erreicht ist, ist die Bedingung $x_3 \wedge x_0$ erfüllt und u wird auf 1 gesetzt. ◯

Aufgabe 2.2 (Tautologien). (4 Punkte)

Prüfe, ob die folgenden Aussagen Tautologien sind, und beweise.

(i) $((p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q)) \iff (p \Leftrightarrow q)$.

Lösung.

$$\begin{aligned} ((p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q)) &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \\ &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \\ &\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \\ &\equiv (p \Leftrightarrow q) \end{aligned}$$

oder mit Wahrheitstabelle wie folgt:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p \Rightarrow \neg q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q)$	$p \Leftrightarrow q$
f	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	f	f
w	w	w	w	w	w

. ◯

(ii) $((a \Rightarrow (b \wedge (c \Rightarrow d))) \vee (b \oplus \neg c)) \iff (\neg a \vee b \vee \neg c)$.

Lösung. Wir könnten auch hier eine Wahrheitstafel aufstellen, aber die wird nun schon unhandlich groß. Wir versuchen es daher mit Umformungen. Die folgenden Aussagen sind untereinander äquivalent:

$$(a \Rightarrow (b \wedge (c \Rightarrow d))) \vee (b \oplus \neg c)$$
$$\neg a \vee (b \wedge (\neg c \vee d)) \vee (b \wedge c) \vee (\neg b \wedge \neg c)$$
$$\neg a \vee (b \wedge \underbrace{(\neg c \vee d \vee c)}_{w}) \vee (\neg b \wedge \neg c)$$
$$\neg a \vee b \vee (\neg b \wedge \neg c)$$
$$\underbrace{(\neg a \vee b \vee \neg b)}_{w} \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c)$$
$$(\neg a \vee b \vee \neg c)$$

Damit gilt die angegebene Aussage immer und ist also eine Tautologie.

◯

Aufgabe 2.3 (Induktion). (4 Punkte)

Es heißt, nachts seien alle Katzen grau. Wir zeigen, dass zumindest alle Katzen die gleiche Farbe haben! Oder?

Satz. *Alle Katzen haben die gleiche Farbe.*

Beweis. Wir zeigen per Induktion: Alle Katze in einer geordneten Liste von n Katzen haben die gleiche Farbe.

Induktionsanfang: In einer Liste mit nur einer Katze haben natürlich alle Katzen die gleiche Farbe.

Induktionsschritt: Wir betrachten eine Liste mit $n+1$ Katzen. Die Katzen mit den Nummern 1 bis n bilden eine Liste mit n Katzen und haben also nach Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Farbe. Aber auch die Katzen 2 bis $n+1$ bilden eine Liste mit n Katzen und haben nach Induktionsvoraussetzung die gleiche Farbe. Da die Katze Nummer 2 in beiden Listen ist, haben also alle $n+1$ Katzen die gleiche Farbe.

Induktionsschluss: Alle Katzen haben die gleiche Farbe. □

Finde den Fehler und begründe.

Lösung. Das Problem ist hier, dass der Induktionsschritt für $n = 1$ falsch ist. Bei $n = 1$ betrachten wir dann eine Gesamtliste mit 2 Katzen. Die Katze mit der Nummer 1 bildet dann eine Liste mit einer = n Katze und hat so nach Induktionsvoraussetzung die gleiche Farbe. Aber auch die Katzen 2 bildet eine Liste mit einer Katze und hat nach Induktionsvoraussetzung die gleiche Farbe. Da die Katze Nummer 2 jetzt nicht in beiden Listen ist, liegt hier der Fehler. ○

Aufgabe 2.4 (Induktion). (4 Punkte)

Bestimme die natürlichen Zahlen n für die $n^2 \leq 2^n$ gilt. Beweise Dein Ergebnis.

Lösung. Um das kleinste $n \in \mathbb{N}$ zu finden, für das diese Gleichung gilt, setzen wir einfach mal die kleinen n ein:

$$\begin{aligned}
n=1: &\quad 1=1^2 \leq 2=2 \\
n=2: &\quad 4=2^2 \leq 2^2=4 \\
n=3: &\quad 9=3^2 \not\leq 2^3=8 \\
n=4: &\quad 16=4^2 \leq 2^4=16 \\
n=5: &\quad 25=5^2 \leq 2^5=32 \\
n=6: &\quad 36=6^2 \leq 2^6=64
\end{aligned}$$

Scheinbar funktioniert das für jede der Zahlen außer 3. Also werden wir versuchen, die Gleichung für $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ mithilfe von zwei kleinen Induktionen zu zeigen!

Zuerst beweisen wir die Behauptung: $2n+1 \leq n^2$ für $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$. (Hier müßte keine Induktion gemacht werden, aber der Übung halber...)

Induktionsanfang: Sei $n=3$. Wir sehen leicht

$$2 \cdot 3 + 1 = 7 \leq 9 = 3^2.$$

Also ist die Aussage richtig für $n \geq 3$.

Induktionsschritt: $n \to n+1$.

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 &= n^2+2n+1 \\
&\overset{\text{IV}}{\geq} 2n+1+2n+1 = 2n+2n+2 \\
&\overset{2n\geq 1}{\geq} 2n+3 = 2(n+1)+1.
\end{aligned}$$

Induktionsschluss: Die Behauptung ist richtig!

Mit dieser Vorarbeit können wir jetzt leicht die eigentliche Aufgabe lösen:

Induktionsanfang: Sei $n=4$. Wir sehen sofort

$$4^2 = 16 \leq 16 = 2^4.$$

Die Aussage ist also richtig für $n=4$.

Induktionsschritt: $n \to n+1$.

$$\begin{aligned}
2^{n+1} &= 2^n \cdot 2 \overset{\text{IV}}{\geq} n^2 \cdot 2 = n^2 + n^2 \\
&\overset{\text{s.o.}}{\geq} n^2+2n+1 = (n+1)^2.
\end{aligned}$$

Induktionsschluss: Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ gilt: $n^2 \leq 2^n$. $\bigcirc$

Aufgabe 2.5 (Induktion). (4 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei $a_n := 11^{n+1} + 12^{2n-1}$. Zeige durch vollständige Induktion, dass alle a_n Vielfache von 133 sind.

Lösung. Zu zeigen ist also, dass sich a_n für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ schreiben läßt als

$$a_n = 133 \cdot d_n, \quad d_n \in \mathbb{N}.$$

Induktionsanfang: Sei $n = 1$.

$$a_1 = 11^2 + 12^1 = 121 + 12 = 133 = 133 \cdot 1.$$

ist offensichtlich durch 133 teilbar. Das d_1 ist also 1.

Induktionsschritt: $n \to n + 1$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 11^{(n+1)+1} + 12^{2(n+1)-1} = 11^{n+2} + 12^{2n+1} \\ &= 11^{n+1} \cdot 11 + 12^{2n-1} \cdot 12^2 \\ &= 11^{n+1} \cdot 11 + 12^{2n-1} \cdot 11 + 12^{2n-1} \cdot \left(12^2 - 11\right) \\ &= 11 \cdot \left(11^{n+1} + 12^{2n-1}\right) + 12^{2n-1} \cdot 133 \\ &\overset{\text{IV}}{=} 11 \cdot 133 \cdot d_n + 12^{2n-1} \cdot 133 = 133 \cdot \underbrace{\left(11 \cdot d_n + 12^{2n-1}\right)}_{d_{n+1}}. \end{aligned}$$

Induktionsschluss: Die Behauptung ist korrekt! ○