1. Musterlösung zu Mathematik für Informatiker I, WS 2003/04

Michael Nüsken, Kathrin Tofall & Susanne Urban

Aufgabe 1.1 (Aussagenlogik und natürliche Sprache). (9 Punkte)

(1) Prüfe, ob folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. (2) Formuliere die Aussagen so um, dass nur noch die Verknüpfungen „wenn-dann“, „und“, „oder“ und „nicht“ verwendet werden. (3) Formuliere die Aussagen, soweit wie möglich, mit den logischen Symbolen $\wedge$, $\vee$ und $\neg$. (4) Verneine die Aussagen.

(i) Wenn man einen Regenbogen sieht, dann regnet es.

Lösung. (1) Regenbogen sieht man typischerweise, wenn man eine Regenwand mit der Sonne im Rücken betrachtet. $\underbrace{\text{„Man sieht einen Regenbogen.“}}_{=:b}$ kann wahr und falsch sein, genauso wie die Aussage $\underbrace{\text{„Es regnet.“}}_{=:a}$. Aber nach dem Vorgesagten kann es nicht passieren, dass man einen Regenbogen sieht, ohne dass es regnet. Also ist die Aussage *wahr*.

Nun ist aber unsere Sprache nicht so präzise wie die Mathematik. Beispielsweise wird in der Aussage a nicht gesagt, wann oder wo es regnen soll. Auch die Aussage b ist nicht so ganz genau, man kann durchaus auch davon ausgehen, dass jemand blind ist und also nie einen Regenbogen sieht, egal welche Bedingungen erfüllt sind. Man könnte auch anführen, dass man ja auch einen Regenbogen sieht, wenn die Sonne scheint und der Rasensprenger einen Tröpfchenregen erzeugt. (Wogegen sich einwenden liesse, dass das eben ein Miniregen ist.) Diese Ungenauigkeiten in unserer Sprache zu erkennen, ist Teil des Ziels dieser Aufgabe.

(2) Wenn man einen Regenbogen sieht, dann regnet es.

(3) $a \vee \neg b$.

(4) $\neg(a\vee\neg b) \equiv \neg a\wedge b$, also: Es regnet nicht und man sieht einen Regenbogen. ○

(ii) Bei Regen sieht man einen Regenbogen.

Lösung. (1) Wir können uns auch hier wieder über Interpretationen streiten. Nach der oben beschriebenen Interpretation ist diese Aussage falsch, denn es kann ja der Fall eintreten, dass es zwar regnet (a), aber man keinen Regenbogen sieht, weil die Sonne nicht scheint ($\neg b$). Also ist diese Aussage falsch.

(2) Wenn es regnet, dann sieht man einen Regenbogen.

(3) $\neg a \vee b$.

(4) $\neg(\neg a \vee b) \equiv a \wedge \neg b$, also: Es regnet und man sieht keinen Regenbogen. ○

(iii) Wenn es nicht regnet, dann sieht man keinen Regenbogen.

Lösung. (1) Nach obiger Interpretation kann man ohne Regen keinen Regenbogen sehen. Die Aussage, $\neg a \Rightarrow \neg b$, ist also wahr.

(2) Wenn es nicht regnet, dann sieht man keinen Regenbogen.

(3) $\neg a \vee b$.

(4) $\neg(\neg a \vee b) \equiv a \wedge \neg b$, also: Es regnet nicht und man sieht einen Regenbogen. ○

(iv) Blaue Veilchen sind genauso rot wie jede grüne Rose.

Lösung. (1) $\underbrace{\text{„Blaue Veilchen sind rot."}}_{=:v}$ ist eine falsche Aussage und ebenso $\underbrace{\text{„Grüne Rosen sind rot."}}_{=:r}$. Das „genauso" drückt nun Äquivalenz aus, und damit ist die Gesamtaussage $f \Leftrightarrow f$, also wahr.

Eine andere Interpretation wäre: Das Maß (wie auch immer gemessen) an Rot in einem blauen Veilchen ist gleich dem Maß an Rot in einer grünen Rose. Da ein blaues Veilchen eben blau ist, also nicht rot und eine grüne Rose eben grün, also auch nicht rot, sind beide gleich rot. Auch so gesehen ist die Aussage wahr.

Eine dritte Möglichkeit die Aussage anzusehen, wäre diese: „Für *jedes* blaue Veilchen und *jede* grüne Rose gilt: beide sind gleich rot." Nun gibt es aber gar keine grünen Rosen. (Nur weißlich grünliche und das zählt nicht!) Also ist die Aussage schon einfach deswegen wahr. Die Informatikerversion hiervon ist ein Programm wie folgendes:

Algorithmus.
Eingabe: Keine.
Ausgabe: w für wahr oder f für falsch.

1. Setze Antwort $:= w$.
2. For x grüne Rose do
3. Antwort $:=$ Antwort $\wedge$ Blaue Veilchen sind genauso rot wie x.
4. Gib Antwort zurück.

Da hier die Schleife niemals durchlaufen wird, ist die Antwort natürlich: w für wahr.

Für den Rest bleiben wir bei der ersten Interpretation.

(2) Wenn blaue Veilchen rot sind, dann sind es grüne Rosen auch und wenn grüne Rosen rot sind, dann auch blaue Veilchen.

(3) $(\neg v \vee r) \wedge (\neg r \vee v)$. [Das ist dasselbe wie $v \oplus r$.]

(4) $\neg((\neg v \vee r) \wedge (\neg r \vee v)) \equiv (v \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg v)$, also: Blaue Veilchen sind rot und grüne Rosen nicht oder grüne Rosen sind rot und blaue Veilchen nicht. ○

(v) Dunkel war's, der Mond schien helle.

Lösung. (1) $\underbrace{\text{„Dunkel war's."}}_{=:d}$ ist wahr und $\underbrace{\text{„Der Mond schien helle."}}_{=:h}$ ist falsch, da der Mond nur das Licht der Sonne reflektiert. (Na ja, das stimmt jedenfalls bei einer gewissen Definition von „scheinen".) Die Aussage ist also falsch.

Auch hier sind viele andere Interpretationen denkbar. Man denke etwa an René Magrittes Bild „Das Reich der Lichter" (1953/54, ↑Links).

(2) Dunkel war es und der Mond schien hell.

(3) $d \wedge h$.

(4) $\neg(d \wedge h) \equiv \neg d \vee \neg h$, also: Es war nicht dunkel oder der Mond schien nicht hell. ◯

(vi) Aus, wenn Hunde Katzen fressen, dann fressen Katzen Mäuse, ergibt sich, dass Mäuse Hunde jagen.

Lösung. (1) $\underbrace{\text{„Hunde fressen Katzen."}}_{=:a}$ ist falsch, $\underbrace{\text{„Katzen fressen Mäuse."}}_{=:b}$ ist richtig und $\underbrace{\text{„Mäuse jagen Hunde."}}_{=:c}$ wieder falsch. Die erste „wenn-dann"-Bedingung ist wahr. Also würde insgesamt aus einer wahren Aussage eine falsche folgen, also ist die Aussage falsch.

(2) Wenn „Wenn Hunde Katzen fressen, dann fressen Katzen Mäuse." stimmt, dann jagen Mäuse Hunde.

(3) $(a \Rightarrow b) \Rightarrow c \equiv \neg(\neg a \vee b) \vee c \equiv (a \wedge \neg b) \vee c$.

(4) $\neg((a \wedge \neg b) \vee c) \equiv (\neg a \vee b) \wedge \neg c$, also: Hunde fressen keine Katzen oder Katzen fressen Mäuse und Mäuse jagen keine Hunde. ◯

(vii) Angenommen Hunde fressen Katzen, folglich: wenn Katzen Mäuse fressen, jagen Mäuse Hunde.

Lösung. (1) $\underbrace{\text{„Hunde fressen Katzen."}}_{=:a}$ ist falsch, $\underbrace{\text{„Katzen fressen Mäuse."}}_{=:b}$ ist richtig und $\underbrace{\text{„Mäuse jagen Hunde."}}_{=:c}$ wieder falsch. Die Aussage 'Wenn Katzen Mäuse fressen, dann jagen Mäuse Hunde.' ist falsch, weil aus einer wahren eine falsche Aussage gefolgert wird. Insgesamt ist (vii) aber wahr, da aus der falschen Aussage 'Hunde fressen Katzen' auf eine falsche Aussage geschlossen wird.

(2) Wenn Hunde Katzen fressen, dann jagen Mäuse Hunde, wenn Katzen Mäuse fressen.

(3) $\neg a \vee \neg b \vee \neg c$

(4) $\neg(\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \equiv a \wedge b \wedge \neg c$, also: Hunde fressen Katzen und Katzen fressen Mäuse und Mäuse jagen keine Hunde. ◯

(viii) Dieser Satz ist nicht wahr.

Lösung. (1) Dies ist keine Aussage, da der Satz weder wahr noch falsch ist.

Andererseits hat es Kurt Gödel trotzdem geschafft, in einem vorgegebenen Rahmen Aussagen zu konstruieren nach genau diesem Muster. Für diese kann man dann im bisherigen Rahmen einfach keinen Beweis und keinen Gegenbeweis finden, und sich daher aussuchen, ob die Aussage wahr oder falsch sein soll. Für später: Das Halteproblem ist die informatiknahe Variante derselben Erscheinung. ◯

Welchen Unterschied siehst Du zwischen den folgenden beiden Aussagen?

(A) Lola geht mit ihrem Personalausweis oder ihrem Reisepass über den Zoll.

(B) Bertram geht mit seiner Freundin oder seiner Frau in die Disco.

Lösung. Der Personalausweis und der Reisepass erfüllen beide den gleichen Zweck für Lola, sie sind für den Zoll gleichwertig und sie kann sie durchaus auch beide gleichzeitig bei sich haben. Es handelt sich also um ein „Oder".

Bertrams Freundin kann sich aber durchaus von Bertrams Frau unterscheiden, und wenn dem so ist, wird er vermutlich nicht mit beiden gleichzeitig irgendwo sein wollen. In diesem Satz haben wir dann eher ein „Exklusives Oder". ○

Aufgabe 1.2 (Wahrheitstafel). (4 Punkte)

Fülle die folgende Wahrheitstafel:

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow c$	$(a \Rightarrow b) \Rightarrow c$	$a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$	$(a \wedge b) \Rightarrow c$
0	0	0					
1	0	0					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
1	1	1					

Lösung.

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow c$	$(a \Rightarrow b) \Rightarrow c$	$a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$	$(a \wedge b) \Rightarrow c$
f	f	f	w	w	f	w	w
w	f	f	f	w	w	w	w
f	w	f	w	f	f	w	w
w	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w	w
w	w	w	w	w	w	w	w

○

Aufgabe 1.3 (Zwei Implikationen). (3 Punkte)

Finde Belegungen von a, b, c mit realen Aussagen, die $(a \Rightarrow b) \Rightarrow c$ falsch und $a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$ wahr werden lassen.

Lösung. Aus der Tabelle von Aufgabe 1.2 kann man schnell ablesen, dass es nur zwei Belegung gibt, die die beiden Forderungen erfüllt, nämlich

(i) $a = f$, $b = f$, $c = f$ und

(ii) $a = f$, $b = w$, $c = f$. Ein Beispiel mit realen Aussagen sind die Teile (vi) und (vii) von Aufgabe 1.1. ○

Lösung (Alte Version). In der ersten Formulierung der Aufgabe 1.3 wurde nach Belegungen gefragt, für die $(a \Rightarrow b) \Rightarrow c$ wahr und $a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$ falsch ist. Aus der Tabelle von Aufgabe 1.2 kann man sofort ablesen, dass das gar nicht geht. ○

Aufgabe 1.4 (Schaltkreise). (4 Punkte)

Finde für x, y, z, φ jeweils einen (nicht allzu langen) Ausdruck, der die angegebenen Wahrheitswerte liefert und nur a, b, c, $\wedge$, $\vee$, $\neg$ verwendet.

a	b	c	x	y	z	φ
0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	1

Lösung. Vorab stellen wir fest, dass hier 0 für falsch und 1 für wahr steht.

(x) $(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$. [Das ist dasselbe wie $a \oplus b$.]

(y) $\neg a \vee b$.

(z) $b \vee ((\neg a \vee c) \wedge (a \vee \neg c))$. [Das ist dasselbe wie $((a \oplus c) \Rightarrow b))$.]

(φ) $(a \wedge ((\neg b \wedge \neg c) \vee (b \wedge c))) \vee (\neg a \wedge ((b \wedge \neg c) \vee (\neg b \wedge c)))$. [Das ist dasselbe wie $a \oplus b \oplus c$.] ○