Bernhard Dietrich





## Aufgabe 6.1

(i) $d \mid x \wedge d \mid y \Rightarrow d \mid (sx+ty)$

$d \mid x \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = dk$

$d \mid y \Rightarrow \exists l \in \mathbb{Z} : x = dl$

$sx+ty = sdk+tdl$

$= d(dk+tl)$

$\Rightarrow d \mid sx+ty$

(ii) $sx+ty = d \Rightarrow ggT(x,y) \mid d$

Sei $g = ggt(x,y)$, dann $g \mid x \wedge g \mid y$. Nach i gilt dann $g \mid sx+ty$, also $ggT(x,y) \mid d$.

## Aufgabe 6.2

(i) Falls $a < b$:

$a+b = \min\{a,b\} + \max\{a,b\}$

$= a+b$

Falls $a > b$:

$a+b = \min\{a,b\} + \max\{a,b\}$

$= b+a$

$= a+b$

Falls $a = b$:

$a+b = \min\{a,b\} + \max\{a,b\}$

$= \min\{a,a\} + \max\{a,a\}$

$= a+a$

$= b+b$

$= a+b$

(ii) Zu zeigen: $x \mid \left( {p_1}^{f_1} \cdot ... \cdot {p_r}^{f_r} \right) \Leftrightarrow \exists e_1,...,e_r \in \mathbb{N} : x = {p_1}^{e_1} \cdot ... \cdot {p_r}^{e_r} \wedge e_1 \le f_1 \wedge ... \wedge e_r \le f_r$

für $x \in \mathbb{N}$

Zwei Aussagen sind äquivalent, wenn die jeweils andere Aussage aus der einen durch eine Implikation gefolgert werden kann. Im Folgenden werden diese beiden Implikationen einzeln bewiesen:

1. $x \mid \left( {p_1}^{f_1} \cdot ... \cdot {p_r}^{f_r} \right) \Rightarrow \exists e_1,...,e_r \in \mathbb{N} : x = {p_1}^{e_1} \cdot ... \cdot {p_r}^{e_r} \wedge e_1 \le f_1 \wedge ... \wedge e_r \le f_r$

   Wegen $x \mid \left( {p_1}^{f_1} \cdot ... \cdot {p_r}^{f_r} \right)$ muss gelten $x \ge 1$.

   Für $x = 1$ gilt $1$ teilt alle Zahlen. Die Exponenten $e_1,...,e_r$ und $f_1,...,f_r$ sind dann alle $= 0$

   Für $x > 1$ gilt nach dem Fundamentalsatz der Zahlentheorie, dass es eine Primfaktorzerlegung für $x$ gibt, für die gilt $x = {p_1}^{e_1} \cdot ... \cdot {p_r}^{e_r}$. $x$ teilt ein Produkt, wenn es einen Faktor teilt, so dass gilt $x \mid {p_1}^{f_1} \vee x \mid {p_2}^{f_2} \vee ... \vee x \mid {p_r}^{f_r}$

   Da $p_1,...,p_r$ prim und paarweise verschieden sind, gilt $x = {p_1}^{e_1} \cdot {p_2}^0 \cdot {p_3}^0 \cdot ... \cdot {p_r}^0$ mit $e_1 \le f_1 \vee x = {p_1}^0 \cdot {p_2}^{e_2} \cdot {p_3}^0 \cdot ... \cdot {p_r}^0$ mit $e_2 \le f_2 \vee ... \vee x = {p_1}^0 \cdot {p_2}^0 \cdot {p_3}^0 \cdot ... \cdot {p_r}^{e_r}$ mit $e_r \le f_r$, da $0 \le f_1, f_2, ..., f_r$.

   Dies kann man zusammenfassen zu $x = {p_1}^{e_1} \cdot ... \cdot {p_r}^{e_r} \wedge e_1 \le f_1 \wedge ... \wedge e_r \le f_r$.

2. $\exists e_1,...,e_r \in \mathbb{N} : x = {p_1}^{e_1} \cdot ... \cdot {p_r}^{e_r} \wedge e_1 \leq f_1 \wedge ... \wedge e_r \leq f_r \Rightarrow x \mid \left( {p_1}^{f_1} \cdot ... \cdot {p_r}^{f_r} \right)$

Jedes ${p_r}^{e_r}$ kann dargestellt werden durch ${p_r}^{e_r} = \prod_{0}^{e_r - 1} p_r$. Somit gilt für jedes ${p_r}^{f_r}$ mit

$e_r \leq f_r : {p_r}^{f_r} = \prod_{0}^{e_r - 1} p_r \cdot \prod_{0}^{f_r - e_r - 2} p_r$.

${p_r}^{f_r}$ ist also ein Vielfaches von ${p_r}^{e_r}$, also folgt ${p_r}^{e_r} \mid {p_r}^{f_r}$.

Dies gilt analog für allen anderen ${p_x}^{e_x}, {p_x}^{f_x}$ mit $x \in \mathbb{N}_{\leq r}$.

Also gilt ${p_1}^{e_1} \mid {p_1}^{f_1} \wedge ... \wedge {p_r}^{e_r} \mid {p_r}^{f_r}$. Da außerdem gilt $x = {p_1}^{e_1} \cdot ... \cdot {p_r}^{e_r}$, folgt $x \mid \left( {p_1}^{f_1} \cdot ... \cdot {p_r}^{f_r} \right)$.

■

(iii) Zu zeigen: $ggT\left( {p_1}^{e_1} \cdot ... \cdot {p_r}^{e_r}, {p_1}^{f_1} \cdot ... \cdot {p_r}^{f_r} \right) = {p_1}^{\min\{e_1, f_1\}} \cdot ... \cdot {p_r}^{\min\{e_r, f_r\}}$

Sei $a := {p_1}^{e_1} \cdot ... \cdot {p_1}^{e_r}$, $b := {p_1}^{f_1} \cdot ... \cdot {p_1}^{f_r}$, $g := {p_1}^{\min\{e_1, f_1\}} \cdot ... \cdot {p_1}^{\min\{e_r, f_r\}}$

Da $\min\{e_1, f_1\} \leq e_1 \wedge ... \wedge \min\{e_r, f_r\} \leq e_r$ folgt nach ii $g \mid a$ und $g \mid b$.

Sei $t \in \mathbb{Z}$, dann gilt also: $t \mid \left( {p_1}^{e_1} \cdot ... \cdot {p_r}^{e_r} \right)$ und $t \mid \left( {p_1}^{f_1} \cdot ... \cdot {p_r}^{f_r} \right)$.

Folglich gibt es nach ii $d_1,...,d_r$ mit $t = {p_1}^{d_1} \cdot ... \cdot {p_r}^{d_r}$ und $d_1 \leq e_1 \wedge ... \wedge d_r \leq e_r$, sowie $d_1 \leq f_1 \wedge ... \wedge d_r \leq f_r$.

Also gilt für alle $1 \leq i \leq r : d_i \leq \min\{e_i, f_i\}$. Wieder mit ii folgt $t \mid g$.

■

(iv) Zu zeigen: $kgV\left( {p_1}^{e_1} \cdot ... \cdot {p_r}^{e_r}, {p_1}^{e_1} \cdot ... \cdot {p_r}^{e_r} \right) = {p_1}^{\max\{e_1, f_1\}} \cdot ... \cdot {p_r}^{\max\{e_r, f_r\}}$

Es muss gelten:

- Wegen $\max\{e_1, f_1\} \geq e_1 \wedge ... \wedge \max\{e_r, f_r\} \geq e_r$ folgt, dass jedes ${p_x}^{\max\{e_x, f_x\}}$, mit $x \in \mathbb{N}_{\leq r}$, entweder gleich ${p_x}^{e_x}$ ist, oder ein Vielfaches davon.
  Somit gilt nach ii $\left( {p_1}^{e_1} \cdot ... \cdot {p_r}^{e_r} \right) \mid \left( {p_1}^{\max\{e_1, f_1\}} \cdot ... \cdot {p_r}^{\max\{e_r, f_r\}} \right)$.
- Ebenso gilt $\left( {p_1}^{f_1} \cdot ... \cdot {p_r}^{f_r} \right) \mid \left( {p_1}^{\max\{e_1, f_1\}} \cdot ... \cdot {p_r}^{\max\{e_r, f_r\}} \right)$, da $\max\{e_1, f_1\} \geq f_1 \wedge ... \wedge \max\{e_r, f_r\} \geq f_r$ und somit jedes ${p_x}^{\max\{e_x, f_x\}}$, mit $x \in \mathbb{N}_{\leq r}$, entweder gleich ${p_x}^{f_x}$ ist, oder ein Vielfaches davon.

Sei $c \in \mathbb{N}$ nun ein beliebiges, gemeinsames Vielfaches von ${p_1}^{e_1} \cdot ... \cdot {p_r}^{e_r}$ und ${p_1}^{f_1} \cdot ... \cdot {p_r}^{f_r}$, so ist $c$ gleich ${p_1}^{\max\{e_1, f_1\}} \cdot ... \cdot {p_r}^{\max\{e_r, f_r\}}$ oder ein Vielfaches davon, da gelten muss $\left( {p_1}^{\max\{e_1, f_1\}} \cdot ... \cdot {p_r}^{\max\{e_r, f_r\}} \right) \mid c$.

■

(v) Zu zeigen: $ggT(x,y)\cdot kgV(x,y)=x\cdot y$ mit $x,y\in\mathbb{N}$

Zunächst zeigen wir es gilt analog zu 6.2 i für die Multiplikation der Potenzen $c^{\min\{a,b\}}\cdot c^{\max\{a,b\}}=c^{a+b}$, da

Falls $a<b$ gilt $c^{\min\{a,b\}}\cdot c^{\max\{a,b\}}=c^{a}\cdot c^{b}=c^{a+b}$

Falls $a>b$ gilt $c^{\min\{a,b\}}\cdot c^{\max\{a,b\}}=c^{b}\cdot c^{a}=c^{b+a}=c^{a+b}$

Falls $a=b$ gilt $c^{\min\{a,b\}}\cdot c^{\max\{a,b\}}=c^{\min\{a,a\}}\cdot c^{\max\{a,a\}}$

$$=c^{a}\cdot c^{a}$$
$$=c^{b}\cdot c^{b}$$
$$=c^{a}\cdot c^{b}$$
$$=c^{a+b}$$

$$ggT(x,y)\cdot kgV(x,y)=ggT\left(p_1^{e_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{e_r},p_1^{f_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{f_r}\right)\cdot kgV\left(p_1^{e_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{e_r},p_1^{f_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{f_r}\right)$$

$$\overset{\text{vgl. iii und iv}}{=}\left(p_1^{\min\{e_1,f_1\}}\cdot\ldots\cdot p_r^{\min\{e_r,f_r\}}\right)\cdot\left(p_1^{\max\{e_1,f_1\}}\cdot\ldots\cdot p_r^{\max\{e_r,f_r\}}\right)$$
$$=p_1^{\min\{e_1,f_1\}}\cdot p_1^{\max\{e_1,f_1\}}\cdot\ldots\cdot p_r^{\min\{e_r,f_r\}}\cdot p_r^{\max\{e_r,f_r\}}$$
$$\overset{\text{siehe oben}}{=}p_1^{e_1+f_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{e_r+f_r}$$
$$=p_1^{e_1}\cdot p_1^{f_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{e_r}\cdot p_r^{f_r}$$
$$=p_1^{e_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{e_r}\cdot p_1^{f_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{f_r}$$
$$=x\cdot y$$

■

(vi) Berechnung von $ggT(1\,639\,032\,613,3\,278\,156\,593)$ mit dem EEA:

| $i$ | $r_i$ | $q_i$ | $s_i$ | $t_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 639 032 613 | | 1 | 0 |
| 1 | 3 278 156 593 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 1 639 032 613 | 2 | 1 | 0 |
| 3 | 91 367 | 17 939 | -2 | 1 |
| 4 | 0 | | 35 879 | -17 939 |

$$ggT(1\,639\,032\,613,3\,278\,156\,593)=91\,367$$

Nach v gilt $ggT(x,y)\cdot kgV(x,y)=x\cdot y\Leftrightarrow kgV(x,y)=\frac{x\cdot y}{ggT(x,y)}$

Setzt man für *x* und *y* erhält man

$$kgV(1\,639\,032\,613,3\,278\,156\,593)=\frac{1\,639\,032\,613\cdot 3\,278\,156\,593}{ggT(1\,639\,032\,613,3\,278\,156\,593)}$$
$$=\frac{5\,373\,005\,566\,447\,967\,509}{58\,806\,851\,121\,827}$$

## Aufgabe 6.3

(i)

| *Schleifendurchlauf* | $i$ | $r_i$ | $q_i$ | $s_i$ | $t_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 219215 | | 1 | 0 |
| | 1 | 807959 | | 0 | 1 |
| 1 | 1 | | 0 | | |
| | 2 | 219215 | | 1 | 0 |
| 2 | 2 | | 3 | | |
| | 3 | 150314 | | -3 | 1 |
| 3 | 3 | | 1 | | |
| | 4 | 68901 | | 4 | -1 |
| 4 | 4 | | 2 | | |
| | 5 | 12512 | | -11 | 3 |
| 5 | 5 | | 5 | | |
| | 6 | 6341 | | 59 | -16 |
| 6 | 6 | | 1 | | |
| | 7 | 6171 | | -70 | 19 |
| 7 | 7 | | 1 | | |
| | 8 | 170 | | 129 | -35 |
| 8 | 8 | | 36 | | |
| | 9 | 51 | | -4714 | 1279 |
| 9 | 9 | | 3 | | |
| | 10 | 17 | | 14271 | -3872 |
| 10 | 10 | | 3 | | |
| | 11 | 0 | | -47527 | 12895 |

$l$=10

(ii) Zu zeigen: $r_i = s_i \cdot a + t_i \cdot b$ für $0 \le i \le l+1$, $i \in \mathbb{N}$ Beweis mit vollständiger Induktion.

**I.A.** Wir zeigen, die Aussage gilt für ein beliebiges, festes $i$, wir wählen $i = 0$

$r_0 = s_0 \cdot a + t_0 \cdot b = 1 \cdot a + 0 \cdot b = a$ (wahre Aussage)

**I.S.** Wir zeigen: gilt die Aussage für ein beliebiges, festes $i$, so gilt sie auch für $i+1$

$$\begin{aligned} r_{i+1} &= s_{i+1} \cdot a + t_{i+1} \cdot b \\ &= \left(s_{i-1} - q_i s_i\right) \cdot a + \left(t_{i-1} - q_i t_i\right) \cdot b \\ &= s_{i-1} \cdot a - q_i s_i \cdot a + t_{i-1} \cdot b - q_i t_i \cdot b \\ &= q_i \left(s_i \cdot a - t_i \cdot b\right) + s_{i-1} \cdot a + t_{i-1} \cdot b \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} q_i r_i + s_{i-1} \cdot a + t_{i-1} \cdot b \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} r_{i-1} - q_i r_i \end{aligned}$$

Somit ist der Nachfolger auf seine beiden Vorgänger zurückgeführt, also ist die Aussage war.

■

(iii) Gemäß dem Euklidischen Algorithmus gilt, $ggT(a,b) = r_l = r_{i-1}$. Also muss es wie in ii gezeigt zwei ganze Zahlen $s,t \in \mathbb{Z}$ geben, für die gilt $ggT(a,b) = s \cdot a + t \cdot b$.

## Aufgabe 6.4

(i) Zu zeigen: $2^k - 1 = \left( \underbrace{1 \ldots 1}_{\text{k mal 1}} \right)_2$ Beweis mit vollständiger Induktion.

**I.A.** Wir zeigen, die Aussage gilt für ein beliebiges, festes $k$, wir wählen $k = 1$

$2^1 - 1 = 1 = (1)_2$ (wahre Aussage)

**I.S.** Wir zeigen: gilt die Aussage für ein beliebiges, festes $k$, so gilt sie ach für $k+1$

$$\begin{aligned} 2^{k+1} - 1 &= 2^k \cdot 2 - 1 \\ &= 2^k \cdot 2 - 2 + 1 \\ &= 2 \cdot \left(2^k - 1\right) + 1 \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} (10)_2 \cdot \left( \underbrace{1 \ldots 1}_{\text{k mal 1}} \right)_2 + (1)_2 \\ &= \left( \underbrace{1 \ldots 1}_{\text{k mal 1}} 0 \right)_2 + (1)_2 \\ &= \left( \underbrace{1 \ldots 1}_{\text{k+1 mal 1}} \right)_2 \end{aligned}$$

■

(ii) $\left(2^7 - 1\right)\left(2^{42} + 2^{14} + 1\right) = (1111111)_2 \cdot \left( \underbrace{1}_{2^{42}} \underbrace{0 \ldots 0}_{\text{27 mal 0}} \underbrace{1}_{2^{14}} \underbrace{0 \ldots 0}_{\text{13 mal 0}} \underbrace{1}_{2^0} \right)_2$

Schriftliche Multiplikation:

$$\begin{array}{r} 1111111 \cdot \underbrace{1}_{2^{42}} \underbrace{0 \ldots 0}_{\text{27 mal 0}} \underbrace{1}_{2^{14}} \underbrace{0 \ldots 0}_{\text{13 mal 0}} \underbrace{1}_{2^0} \\ \hline \\ 1111111 \\ \vdots \\ 1111111 \\ \vdots \\ + \quad 1111111 \\ \hline \text{7 mal 1} \quad \text{21 mal 0} \quad \text{7 mal 1} \quad \text{7 mal 0} \quad \text{7 mal 1} \end{array}$$

Also $\left(2^7 - 1\right)\left(2^{42} + 2^{14} + 1\right) = \left( 1111111 \underbrace{0 \ldots 0}_{\text{21 mal 0}} 11111110000000 1111111 \right)_2$

(iii) $\left(111\,1100\ 0001\,1111\ 1111\,1000\ 0011\,1111\ 1111\,0000\ 0000\ 0000\ 0001\,1111\right)_2$

$= \left(1\,1111\right)_2 \cdot \left( 1 \underbrace{0 \ldots 0}_{\text{14 mal 0}} 1 \underbrace{0 \ldots 0}_{\text{14 mal 0}} 1 \underbrace{0 \ldots 0}_{\text{19 mal 0}} 1 \right)_2$

(iv) $2^{35} - 1 = 2^{7 \cdot 5} - 1 = \left(31\ 31\ 31\ \ 31\ 31\ 31\ 31\right)_{2^5}$

(v) $\left(31\ 31\ 31\ \ 31\ 31\ 31\ 31\right)_{2^5} = (31)_{2^5} \cdot (111\,1111)_{2^5}$

(vi) $2^{ab} - 1 = \left( \underbrace{\left(2^a - 1\right) \ldots \left(2^a - 1\right)}_{\text{b mal } \left(2^a - 1\right)} \right)_{2^a}$

(vii) $$\left(\underbrace{\left(2^a-1\right)\ldots\left(2^a-1\right)}_{\text{b mal }\left(2^a-1\right)}\right)_{2^a} = \left(2^a-1\right)\cdot\left(\underbrace{1\ldots1}_{\text{b mal 1}}\right)$$

Zu zeigen war $2^k-1 \text{ prim} \Rightarrow k \text{ prim}$. Dies ist aber äquivalent zu
$\neg(k \text{ prim}) \Rightarrow \neg\left(2^k-1 \text{ prim}\right)$.

Wie wir in vii gesehen haben, lässt sich $2^k-1$ als echtes Produkt darstellen (und ist somit nicht prim), wenn $k = a \cdot b$ ist. Dann ist $k$ aber keine Primzahl. Also ist
$\neg(k \text{ prim}) \Rightarrow \neg\left(2^k-1 \text{ prim}\right)$ wahr und somit auch $2^k-1 \text{ prim} \Rightarrow k \text{ prim}$.

■

## Aufgabe 6.5

Sei $\varphi$ eine Formel mit Parameter.

Zu zeigen: $\forall n \in \mathbb{N}\left(\left(\forall i \in \mathbb{N}_{<n}\varphi(i)\right) \Rightarrow \varphi(n)\right) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\varphi(n)$

Es sei $\psi(n) :\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_{<n}\varphi(i)$

Test beider Aussagen mit ausgewählten $n$:

| $n$ | $\forall n \in \mathbb{N}\left(\left(\forall i \in \mathbb{N}_{<n}\varphi(i)\right) \Rightarrow \varphi(n)\right)$ | $\psi(n)$ |
|---|---|---|
| 0 | $\left(\forall i \in \mathbb{N}_{<0}\varphi(i)\right) \Rightarrow \varphi(0)$<br>Da $\mathbb{N}_{<0} = \{\ \}$, sind alle daraus gefolgerten Aussagen wahr. | Da $\mathbb{N}_{<0} = \{\ \}$ ist $\forall i \in \mathbb{N}_{<n}\varphi(i)$ unerfüllbar. |
| 1 | $\left(\forall i \in \mathbb{N}_{<1}\varphi(i)\right) \Rightarrow \varphi(1)$<br>Da $\mathbb{N}_{<1} = \{0\}$ folgt $\varphi(0) \Rightarrow \varphi(1)$ | Da $\mathbb{N}_{<1} = \{0\}$ folgt $\varphi(0)$ |
| 2 | $\left(\forall i \in \mathbb{N}_{<2}\varphi(i)\right) \Rightarrow \varphi(2)$<br>Da $\mathbb{N}_{<2} = \{0;1\}$ folgt $\left(\varphi(0) \wedge \varphi(1)\right) \Rightarrow \varphi(2)$ | Da $\mathbb{N}_{<2} = \{0;1\}$ folgt $\varphi(0) \wedge \varphi(1)$ |
| k | $\left(\forall i \in \mathbb{N}_{<k}\varphi(i)\right) \Rightarrow \varphi(k)$<br>Da $\mathbb{N}_{<k} = \{0;\ldots;k-1\}$ folgt $\left(\varphi(0) \wedge \ldots \wedge \varphi(k-1)\right) \Rightarrow \varphi(k)$ | Da $\mathbb{N}_{<k} = \{0;\ldots;k-1\}$<br>folgt $\varphi(0) \wedge \ldots \wedge \varphi(k-1)$ |

Induktionsschluss von $k \to k+1$
$\left(\forall i \in \mathbb{N}_{<k+1}\varphi(i)\right) \Rightarrow \varphi(k+1)$

Da $\mathbb{N}_{<k+1} = \{0;\ldots;k-1;k\}$ folgt $\left(\varphi(0) \wedge \varphi(1) \wedge \ldots \wedge \varphi(k-1) \wedge \varphi(k)\right) \Rightarrow \varphi(k+1)$.

Da nach I.V. gilt $\forall i \in \mathbb{N}_{<k}\varphi(i) \Rightarrow \varphi(k)$, muss somit $\forall i \in \mathbb{N}_{<k+1}\varphi(i) \Rightarrow \varphi(k+1)$ gelten.

Da die Variable $n$ fest, aber beliebig gewählt werden kann, zeigt die obige Induktion, dass die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

■

## Aufgabe 6.6

(i) $a = 3795, b = 2574$

| $i$ | $r_i$ | $q_i$ | $s_i$ | $t_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 3795 | | 1 | 0 |
| 1 | 2574 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1221 | 2 | 1 | -1 |
| 3 | 132 | 9 | -2 | 3 |
| 4 | 33 | 4 | 19 | -28 |
| 5 | 0 | | -78 | 115 |

$ggT(3795, 2574) = 33 = 19 \cdot 3795 - 28 \cdot 2574$

(ii) $a = 5978, b = 6699$

| $i$ | $r_i$ | $q_i$ | $s_i$ | $t_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 5978 | | 1 | 0 |
| 1 | 6699 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 5978 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 721 | 8 | -1 | 1 |
| 4 | 210 | 3 | 9 | -8 |
| 5 | 91 | 2 | -28 | 25 |
| 6 | 28 | 3 | 65 | -58 |
| 7 | 7 | 4 | -223 | 199 |
| 8 | 0 | | 957 | -854 |

$ggT(5978, 6699) = 7 = -233 \cdot 5978 + 199 \cdot 6699$

(iii) $a = 610, b = 377$

| $i$ | $r_i$ | $q_i$ | $s_i$ | $t_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 610 | | 1 | 0 |
| 1 | 377 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 233 | 1 | 1 | -1 |
| 3 | 144 | 1 | -1 | 2 |
| 4 | 89 | 1 | 2 | -3 |
| 5 | 55 | 1 | -3 | 5 |
| 6 | 34 | 1 | 5 | -8 |
| 7 | 21 | 1 | -8 | 13 |
| 8 | 13 | 1 | 13 | -21 |
| 9 | 8 | 1 | -21 | 34 |
| 10 | 5 | 1 | 34 | -55 |
| 11 | 3 | 1 | -55 | 89 |
| 12 | 2 | 1 | 89 | -144 |
| 13 | 1 | 2 | -144 | 233 |
| 14 | 0 | | 377 | -610 |

$ggT(610, 377) = 1 = -144 \cdot 610 + 233 \cdot 377$