Aufgabe 5.1

(i)

- $98765432109876543210+12345678901234567890$
  $= 111111111011111111100$
- $98765432109876543210 \cdot 12345678901234567890$
  $= 1219326311370217952237463801111263526900$
- $98765432109876543210 / 12345678901234567890$
  $= \dfrac{109739369}{13717421}$

(ii)

```
> matrikel := 6256800;
  matrikel mod 1000;
  matrikel^2 mod 1000;
  (matrikel mod 1000)^2;
  (matrikel mod 1000)^2 mod 1000;
  matrikel &^ 2 mod 1000;
                    matrikel := 6256800
                            800
                             0
                          640000
                             0
                             0
```

(iii)

- $1012! = 43488...$
- $1012! \bmod 1013 = 1012$

Aufgabe 5.2

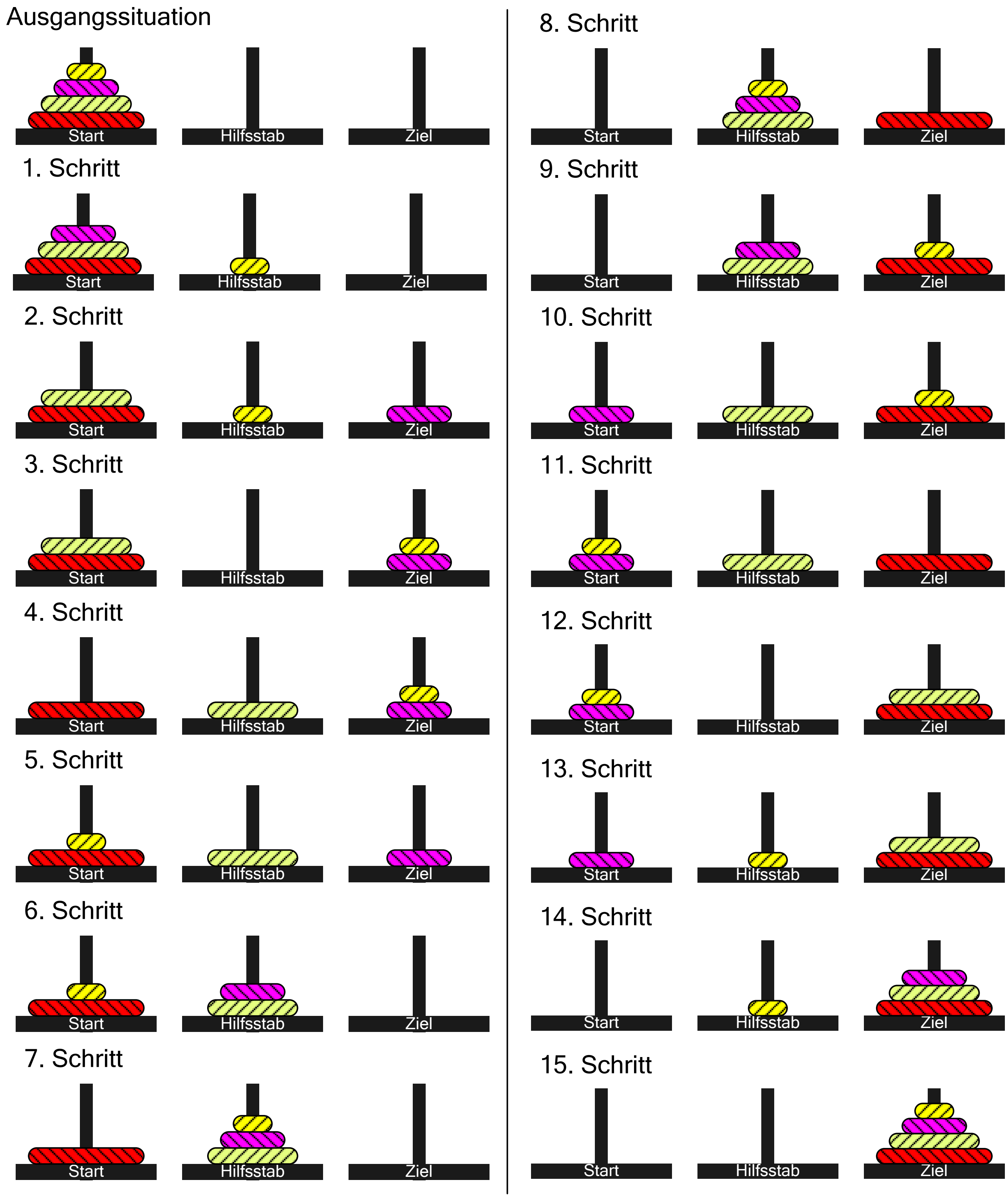
(i) $T_1 = 1$

$T_2 = 3$

$T_3 = 7$

$T_4 = 15$

(ii) Illustration der Ausführung des Algorithmus für $n = 4$:



(iii) Da der Rekursionsanker $n > 0$ des Algorithmus (Zeile 1) sofort greift und der eigentliche Algorithmus (Zeile 2-4) nicht ausgeführt wird, wenn $n = 0$ ist, finden keine Scheibenbewegungen statt, also ist $T_0 = 0$.

Für T_n Scheiben benötigt der Algorithmus $2 \cdot T_{n-1} + 1$ Bewegungen, da der Algorithmus sich zweimal für $n-1$ Scheiben selbst aufruft (Rekursion in den Zeilen 2 und 4). Die Addition $+1$ steht für die Scheibenbewegung die jeder Durchlauf des Algorithmus durchführt (Zeile 3).

(iv) Zu zeigen: $T_n = 2^n - 1$

I.A.: Wir zeigen, die Behauptung gilt für ein beliebiges, festes n, wir wählen $n = 0$:
$T_0 = 2^0 - 1 = 0$ wahre Aussage (vgl. Teilaufgabe (iii))

I.S: Wir zeigen, gilt für ein beliebiges, festes n, gilt sie auch für $n+1$

$$
\begin{aligned}
T_{n+1} &= 2 \cdot T_n + 1 \text{ (gezeigt in Teilaufgabe (iii))} \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} 2 \cdot \left(2^n - 1\right) + 1 \\
&= 2^{n+1} - 2 + 1 \\
&= 2^{n+1} - 1
\end{aligned}
$$

■

Aufgabe 5.3

(i)

Buchstabe	**B**	**e**	**r**	**n**	**h**	**a**	**r**	**d**
ASCII-Wert (dez.)	66	101	114	110	104	97	114	100
Zahl eines Paares	16997		29294		26721		29284	

(ii)

Buchstabe	**B**	**e**	**r**	**n**	**h**	**a**	**r**	**d**
Nachfolgender Buchstabe	**E**	**f**	**s**	**o**	**i**	**b**	**s**	**e**
ASCII-Wert (dez.)	67	102	115	111	105	98	115	101

(iii)

Buchstabe	**B**	**e**	**r**	**n**	**h**	**a**	**r**	**d**
ASCII-Wert (dez.)	66	101	114	110	104	97	114	100
Zahl eines Paares	16997		29294		26721		29284	
Quadrat des Paares	288898009		858138436		714011841		857552656	
Paar^2 mod 66013	25121		35449		15233		43786	
ASCII-Wert (dez.)	98	33	138	121	59	129	171	10
Text	**b**	**!**	**è**	**y**	**;**	**ü**	**½**	**LF**

Aufgabe 5.4

Hinweis zur Schreibweise:
$(+;0{,}1234;5)=+0{,}1234\cdot 10^5$

(i)

Zahl	*Genauigkeit*	*normierte Dezimaldarstellung*
4711	3	$(+;0{,}471;4)$
	4	$(+;0{,}4711;4)$
	5	$(+;0{,}47110;4)$
4710	3	$(+;0{,}471;4)$
	4	$(+;0{,}4710;4)$
	5	$(+;0{,}47100;4)$

(ii) $a := 4711^4 - 4710^4$

mit 3-stelliger Genauigkeit:

$$\begin{aligned}a &:= 4711^4 - 4710^4\\
&=\big((+;0{,}471;4)\cdot(+;0{,}471;4)\cdot(+;0{,}471;4)\cdot(+;0{,}471;4)\big)\\
&\qquad-\big((+;0{,}471;4)\cdot(+;0{,}471;4)\cdot(+;0{,}471;4)\cdot(+;0{,}471;4)\big)\\
&=\big((+;0{,}222;8)\cdot(+;0{,}222;8)\big)-\big((+;0{,}222;8)\cdot(+;0{,}222;8)\big)\\
&=(+;0{,}493;15)-(+;0{,}493;15)\\
&=(+;0{,}000;0)\end{aligned}$$

mit 4-stelliger Genauigkeit:

$$\begin{aligned}a &:= 4711^4 - 4710^4\\
&=\big((+;0{,}4711;4)\cdot(+;0{,}4711;4)\cdot(+;0{,}4711;4)\cdot(+;0{,}4711;4)\big)\\
&\qquad-\big((+;0{,}4710;4)\cdot(+;0{,}4710;4)\cdot(+;0{,}4710;4)\cdot(+;0{,}4710;4)\big)\\
&=\big((+;0{,}2219;8)\cdot(+;0{,}2219;8)\big)-\big((+;0{,}2218;8)\cdot(+;0{,}2218;8)\big)\\
&=(+;0{,}4924;15)-(+;0{,}4920;15)\\
&=(+;0{,}4000;12)\end{aligned}$$

mit 5-stelliger Genauigkeit:

$$\begin{aligned}a &:= 4711^4 - 4710^4\\
&=\big((+;0{,}47110;4)\cdot(+;0{,}47110;4)\cdot(+;0{,}47110;4)\cdot(+;0{,}47110;4)\big)\\
&\qquad-\big((+;0{,}47100;4)\cdot(+;0{,}47100;4)\cdot(+;0{,}47100;4)\cdot(+;0{,}47100;4)\big)\\
&=\big((+;0{,}22194;8)\cdot(+;0{,}22194;8)\big)-\big((+;0{,}22184;8)\cdot(+;0{,}22184;8)\big)\\
&=(+;0{,}49257;15)-(+;0{,}49213;15)\\
&=(+;0{,}44000;12)\end{aligned}$$

(iii) $b := 4711^3 + 4711^2 \cdot 4710 + 4711 \cdot 4710^2 + 4710^3$

mit 3-stelliger Genauigkeit

$$\begin{aligned}
b &:= 4711^3 + 4711^2 \cdot 4710 + 4711 \cdot 4710^2 + 4710^3 \\
&= \left(\left(+;0,471;4\right)\cdot\left(+;0,471;4\right)\cdot\left(+;0,471;4\right)\right)+\left(\left(+;0,471;4\right)\cdot\left(+;0,471;4\right)\right)\cdot\left(+;0,471;4\right) \\
&\qquad +\left(+;0,471;4\right)\cdot\left(\left(+;0,471;4\right)\cdot\left(+;0,471;4\right)\right)+\left(\left(+;0,471;4\right)\cdot\left(+;0,471;4\right)\cdot\left(+;0,471;4\right)\right) \\
&= \left(\left(+;0,222;8\right)\cdot\left(+;0,471;4\right)\right)+\left(+;0,222;8\right)\cdot\left(+;0,471;4\right) \\
&\qquad +\left(+;0,471;4\right)\cdot\left(+;0,222;8\right)+\left(\left(+;0,222;8\right)\cdot\left(+;0,471;4\right)\right) \\
&= \left(+;0,105;12\right)+\left(+;0,105;12\right)+\left(+;0,105;12\right)+\left(+;0,105;12\right) \\
&= \left(+;0,420;12\right)
\end{aligned}$$

mit 4-stelliger Genauigkeit:

$$\begin{aligned}
b &:= 4711^3 + 4711^2 \cdot 4710 + 4711 \cdot 4710^2 + 4710^3 \\
&= \left(\left(+;0,4711;4\right)\cdot\left(+;0,4711;4\right)\cdot\left(+;0,4711;4\right)\right)+\left(\left(+;0,4711;4\right)\cdot\left(+;0,4711;4\right)\right)\cdot\left(+;0,4710;4\right) \\
&\qquad +\left(+;0,4711;4\right)\cdot\left(\left(+;0,4710;4\right)\cdot\left(+;0,4710;4\right)\right) \\
&\qquad +\left(\left(+;0,4710;4\right)\cdot\left(+;0,4710;4\right)\cdot\left(+;0,4710;4\right)\right) \\
&= \left(\left(+;0,2219;8\right)\cdot\left(+;0,4711;4\right)\right)+\left(+;0,2219;8\right)\cdot\left(+;0,4710;4\right) \\
&\qquad +\left(+;0,4711;4\right)\cdot\left(+;0,2218;8\right)+\left(\left(+;0,2218;8\right)\cdot\left(+;0,4710;4\right)\right) \\
&= \left(+;0,1045;12\right)+\left(+;0,1045;12\right)+\left(+;0,1045;12\right)+\left(+;0,1045;12\right) \\
&= \left(+;0,4180;12\right)
\end{aligned}$$

mit 5-stelliger Genauigkeit:

$$\begin{aligned}
b &:= 4711^3 + 4711^2 \cdot 4710 + 4711 \cdot 4710^2 + 4710^3 \\
&= \left(\left(+;0,47110;4\right)\cdot\left(+;0,47110;4\right)\cdot\left(+;0,47110;4\right)\right)+\left(\left(+;0,47110;4\right)\cdot\left(+;0,47110;4\right)\right) \\
&\qquad \cdot\left(+;0,47100;4\right)+\left(+;0,47110;4\right)\cdot\left(\left(+;0,47100;4\right)\cdot\left(+;0,47100;4\right)\right) \\
&\qquad +\left(\left(+;0,47100;4\right)\cdot\left(+;0,47100;4\right)\cdot\left(+;0,47100;4\right)\right) \\
&= \left(\left(+;0,22194;8\right)\cdot\left(+;0,47110;4\right)\right)+\left(+;0,22194;8\right)\cdot\left(+;0,47100;4\right) \\
&\qquad +\left(+;0,47110;4\right)\cdot\left(+;0,22184;8\right)+\left(\left(+;0,22184;8\right)\cdot\left(+;0,47100;4\right)\right) \\
&= \left(+;0,10456;12\right)+\left(+;0,10453;12\right)+\left(+;0,10451;12\right)+\left(+;0,10449;12\right) \\
&= \left(+;0,41809;12\right)
\end{aligned}$$

(iv) $c := a - b$

mit 3-stelliger Genauigkeit:

$$c := a - b$$
$$= (+;0,000;0) - (+;0,420;12)$$
$$= (-;0,420;12)$$

mit 4-stelliger Genauigkeit:

$$c := a - b$$
$$= (+;0,4000;12) - (+;0,4180;12)$$
$$= (-;0,1800;11)$$

mit 5-stelliger Genauigkeit:

$$c := a - b$$
$$= (+;0,44000;12) - (+;0,41809;12)$$
$$= (+;0,21910;11)$$

Exakte Berechnung der Ausdrücke:.

$$a := 4711^4 - 4710^4 = 418081567441$$
$$b := 4711^3 + 4711^2 \cdot 4710 + 4711 \cdot 4710^2 + 4710^3 = 418081567441$$
$$c := a - b = 0$$

Mit zunehmender Mantissenlänge wird das Ergebnis genauer.
Bei kleiner Mantissenlänge gehen zu viele wichtige Stellen schon bei Zwischenergebnissen verloren, sodass das Ergebnis immer ungenauer wird.