5. Übungsblatt zu Mathematik für Informatiker I, WS 2003/04

JOACHIM VON ZUR GATHEN, OLAF MÜLLER, MICHAEL NÜSKEN

Abgabe bis Freitag, 21. November 2003, 11^{11}
in den jeweils richtigen grünen oder roten Kasten auf dem D1-Flur.

Aufgabe 5.1 (Erste Schritte in MAPLE). (4 Punkte)

Wer mit wirklich grossen Zahlen rechnen will, braucht Programme die so etwas können. Eines davon soll in dieser Aufgabe ausprobiert werden.

- Rufe in Deinem Informatik-Login `xmaple8` auf. Das kannst Du (je nach Oberfläche) beispielsweise tun, indem Du ein Terminalfenster öffnest und darin `xmaple8` eintippst und die Enter- oder Return-Taste drückst. Nun sollte MAPLE starten.

- MAPLE-Kommandos sehen oft wie mathematische Formeln aus und müssen immer mit einem Semicolon (oder einem Doppelpunkt) beendet werden, bevor man sie mit Enter abschickt:

  ```
  > 109812390812309898 * 987987908232132;
  > bruch := 109812390812309898 / 987987908232132;
  > floor( bruch );
  > 1 + 2 * 3;
  > (1 + 2) * 3;
  > x := 17;
  > y := x^2;
  > (2*x-30)^4 = 2^8;
  ```

  Das pfeilähnliche Zeichen am Anfang ist die Eingabeaufforderung und muss *nicht* eingegeben werden.

- Mehrzeilige Kommandos können auch eingegeben werden. Eine neue Zeile beginnt man mit Shift+Enter, denn Enter würde Maple auffordern, das bis dahin Getippte auszuführen.

Und jetzt kann's losgehen.

(i) Berechne

$$98765432109876543210 + 12345678901234567890,$$
$$98765432109876543210 \cdot 12345678901234567890,$$
$$98765432109876543210/12345678901234567890.$$

(ii) Berechne (nach Einsetzen Deiner Matrikelnummer):

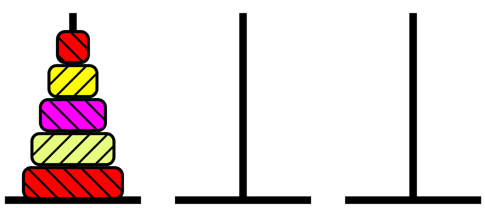
```
> matrikel := .......;
> matrikel mod 1000;
> matrikel^2 mod 1000;
> (matrikel mod 1000)^2;
> (matrikel mod 1000)^2 mod 1000;
> matrikel &^ 2 mod 1000;
```

Bemerkung: Die MAPLE-Operation `mod` kennst Du aus der Vorlesung unter dem Namen rem.

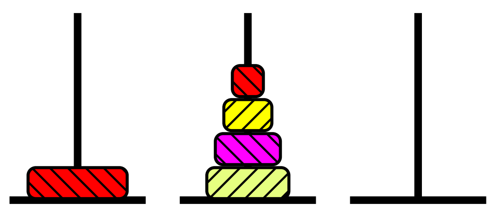
(iii) Gib die ersten fünf Dezimalziffern von $1012!$ und den Rest von $1012!$ bei Division durch 1013 an. [*Bemerkung*: Die Fakultät von n, kurz $n!$, sprich „n Fakultät", ist das Produkt der ersten n Zahlen, also $n! = \prod_{1 \leq k \leq n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. MAPLE versteht das Ausrufezeichen als Fakultätszeichen.]

Aufgabe 5.2 (Induktion, Kinderspiel). (5 Punkte)

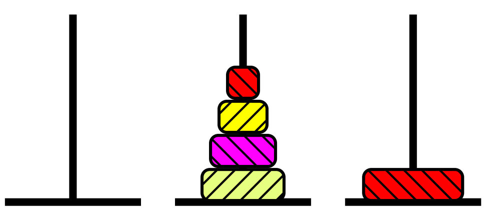
Bei diesem Spiel ist die Aufgabe, eine fest vorgebene Anzahl unterschiedlich großer Scheiben von dem linken auf den rechten von drei Stäben zu bewegen, wobei der mittlere Stab als Hilfsstab zur Verfügung steht. Dabei darf immer nur eine Scheibe bewegt und niemals eine größere auf eine kleinere Scheibe gelegt werden. Eine einfache Idee reduziert das Problem für n Scheiben auf das für $n-1$ Scheiben:



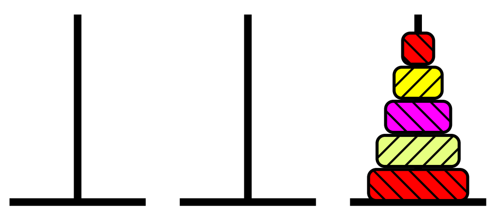
1. Ausgangsituation



2. Bewege zunächst $n-1$ Scheiben auf den Hilfsstab. Benutze den Zielstab als Hilfsstab.



3. Bewege die größte Scheibe vom Startstab zum Zielstab.



4. Bewege $n-1$ Scheiben vom Hilfsstab zum Zielstab. Benutze den Startstab als Hilfsstab.

Dies liefert uns einen rekursiven Algorithmus:

Algorithmus. Kinderspiel.

Eingabe: Anzahl Scheiben n, drei Stäbe „Start”, „Hilf”, „Ziel”.

1. If $n > 0$ then
2.   Kinderspiel($n-1$, „Start”, „Ziel”, „Hilf”).
3.   Versetze eine Scheibe von „Start” nach „Ziel”.
4.   Kinderspiel($n-1$, „Hilf”, „Start”, „Ziel”).

(i) Führe den Algorithmus für $n = 1, 2, 3, 4$ von Hand aus, z.B. mit Münzen, und zähle jeweils die Anzahl Scheibenbewegungen.

(ii) Illustriere die Ausführung des Algorithmus für $n = 4$.

(iii) Für $n \in \mathbb{N}$ sei T_n die Anzahl der Scheibenbewegungen, die der Algorithmus für n Scheiben benötigt. Zeige, dass $T_0 = 0$ und $T_n = 2 \cdot T_{n-1} + 1$ für $n \geq 1$ ist.

(iv) Zeige, dass der Algorithmus für n Scheiben ($n \in \mathbb{N}$) genau $2^n - 1$ Scheibenbewegungen benötigt.

Aufgabe 5.3 (Verschlüsseln). (4 Punkte)

(i) Trage die ersten bis zu acht Zeichen Deines Vornamens — exakt so, wie Du ihn in „Mein Konto“ eingegeben hast — in eine Tabelle ein und lies die ASCII-Werte paarweise(!) als Zahlen zur Basis 256, so wie im folgenden Beispiel. Ergänze am Ende mit Leerzeichen auf acht Zeichen, falls nötig.

Buchstabe	K	a	t	h	r	i	n	␣
ASCII-Wert	75	97	116	104	114	105	110	32
Zahl eines Paars	19297		29800		29289		28192	

(ii) Das Verschlüsselungsverfahren von Cäsar ersetzt jeden Buchstaben durch seinen dritten Nachfolger. Tu dies bezogen auf die ASCII-Codierung mit Deinem Vornamen. Gib das Ergebnis als Liste von ASCII-Werten und als Text an.

(iii) Das Verschlüsselungsverfahren von Rabin ersetzt im wesentlichen jede Eingabe durch ihr Quadrat. Berechne für die Paarzahlen jeweils das Quadrat und dessen Rest bei Division durch 66013. Stelle die Ergebnisse der Divison mit Rest wieder als ASCII-Paare und als Text dar. *Bemerkung*: Tatsächlich kann man aus diesen Werten verhältnismäßig einfach auf die ursprünglichen Werte zurückschließen. (Ohne Probieren!)

Aufgabe 5.4 (Numerik). (4 Punkte)

Berechne mit 3-, 4- und 5-stelliger dezimaler Genauigkeit die Ausdrücke

(i) Berechne für die Zahlen 4711 und 4710 die normierte Dezimaldarstellung (Vorzeichen, Mantisse, Exponent) mit Mantissenlänge 3, 4 und 5.

(ii) $a := 4711^4 - 4710^4$.

(iii) $b := 4711^3 + 4711^2 \cdot 4710 + 4711 \cdot 4710^2 + 4710^3$.

(iv) $c := a - b$.

Berechne beide Ausdrücke exakt. Erkläre Deine Beobachtungen.

5. Übungsblatt zu Mathematik für Informatiker I, WS 2003/04, Mündlicher Teil

JOACHIM VON ZUR GATHEN, OLAF MÜLLER, MICHAEL NÜSKEN

Mündliche Aufgabe 5.5 (Induktion, b-adische Darstellung).

Ziel dieser Aufgabe ist es, die 10-adische Darstellung von 213 zu berechnen.

(i) Führe den Algorithmus der Vorlesung zur Berechnung der 10-adischen (=dezimalen) Darstellung von Hand aus. Schreibe dabei jeden Schritt und jedes Zwischenergebnis genau hin.

(ii) Schreibe die Behauptungen $(*)$, $(**)$, $(***)$ aus dem Beweis für alle Werte von i hin.

(iii) Führe den Beweise für $i = k$ aus. Führe für $i = 1$ den Induktionsschritt aus.

(iv) Zähle die Kosten des Algorithmus zunächst von Hand und vergleiche dies mit dem Beweis.

Mündliche Aufgabe 5.6 (Induktion, Fibonacci).

Fritzchen hat einen (reichlich dummen) Algorithmus geschrieben, um Fibonacci-Zahlen zu berechnen:

Algorithmus. Fibonacci1.
Eingabe: n.
Ausgabe: F_n.

1. If $n \leq 1$ then
2.   Return n.
3. Else
4.   Return Fibonacci1($n-1$) + Fibonacci1($n-2$).

(i) Für $n \in \mathbb{N}$ sei T_n die Anzahl der Additionen, die der Algorithmus bei Eingabe n benötigt. Zeige, dass $T_0 = 0$, $T_1 = 0$ und $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + 1$ für $n \geq 2$ gilt.

(ii) Zeige, dass der Algorithmus bei Eingabe n ($n \in \mathbb{N}$) genau $F_{n+1} - 1$ Additionen benötigt.

(iii) Führe den Algorithmus für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ von Hand aus, und zähle jeweils die Anzahl Additionen.

(iv) Illustriere die Ausführung des Algorithmus für $n = 4$.

Mündliche Aufgabe 5.7 (Induktion).

Zeige, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{1 \leq k \leq n} k^3 = \left(\sum_{1 \leq k \leq n} k \right)^2 .$$

Mündliche Aufgabe 5.8 (Division mit Rest).

Berechne

(i) $283728937 \operatorname{rem} 100$,

(ii) $767 \operatorname{rem} 17$,

(iii) $89712837 \operatorname{rem} 672$,

(iv) $9836273 \operatorname{rem} 17123$.

Mündliche Aufgabe 5.9 (Numerik).

Berechne mit 2-, 3- und 5-stelliger dezimaler Genauigkeit die Ausdrücke

(i) Berechne für die Zahlen 101 und 100 die normierte Dezimaldarstellung (Vorzeichen, Mantisse, Exponent) mit Mantissenlänge 2, 3 und 5.

(ii) $a := 101^3 - 100^3$,

(iii) $b := 101^2 + 101 \cdot 100 + 100^2$,

(iv) $c := a - b$.

Berechne beide Ausdrücke exakt. Erkläre Deine Beobachtungen.