[b|d] bernhard dietrich

Mathematik für Informatiker I
Übungsblatt 4
Matrikel-Nr.: 6256800 • Übungsgruppe 1

Aufgabe 4.1

(i) wahr (Tautologie, man kann auf einer Seite $\left[{}^{y}\!/_{x}\right]$ substituieren und erhält gleiche Aussagen)
(ii) falsch
(iii) wahr (wie bei (i))
(iv) Wahrheitswert nicht bestimmbar

Aufgabe 4.2

(i) $E: a_0, b_0$

$A: c_1, c_0$

1. $c_0 = a_0 \oplus b_0$
2. $c_1 = a_0 \wedge b_0$
3. Return $c = (c_1, c_0)$

(ii) $E: a_0, b_0, u$

$A: c_1, c_0$

1. $c = halbaddierer(a_0, b_0)$
2. $d = halbaddierer(c_1, u)$
3. $c_1 = d_1 \wedge d_0$
4. Return $c = (c_1, c_0)$

(iii) $E: k, a = (a_{k-1}, ...a_0), b = (b_{k-1}, ...b_0)$

$A: c = (c_k, c_{k-1}, ..., c_0)$

1. $u \in \{0,1\} = 0$
2. For $i = 0$ to $k-1$ do 3-5
3. $\quad d = \{d_1 \in \{0,1\}, d_0 \in \{0,1\}\} = volladdierer(a_i, b_i, u)$
4. $\quad c_i = d_0$
5. $\quad u = d_1$
6. $c_k = u$
7. Return $c = \{c_k, c_{k-1}, ..., c_0\}$

(iv) **I.V.:** $i = 0$

$$u_1 \cdot 2^1 + \sum_{0 \le j \le 0} c_j \cdot 2^j = \sum_{0 \le j \le 0} a_j \cdot 2^j + \sum_{0 \le j \le 0} b_j \cdot 2^j$$

$$\Leftrightarrow \quad u_1 \cdot 2 + c_0 = a_0 + b_0$$

wahre Aussage, da u_1 c_1 entspricht und das Ergebnis somit der Gleichung für den Halbaddierer entspricht, der ein gültiges Ergebnis für die Addition zweier Bits liefert.

I.S.: Wir zeigen, gilt die Aussage für ein beliebiges, festes i, dann gilt sie auch für $i+1$:

$$u_{i+1} \cdot 2^{i+1} + \sum_{0 \le j \le i} c_j \cdot 2^j = \sum_{0 \le j \le i} a_j \cdot 2^j + \sum_{0 \le j \le i} b_j \cdot 2^j$$

$$\Leftrightarrow \quad u_{i+2} \cdot 2^{i+2} + \sum_{0 \le j \le i+1} c_j \cdot 2^j = \sum_{0 \le j \le i+1} a_j \cdot 2^j + \sum_{0 \le j \le i+1} b_j \cdot 2^j$$

$$\Leftrightarrow \quad u_{i+2} \cdot 2^{i+2} + \sum_{0 \le j \le i} c_j \cdot 2^j + c_{i+1} \cdot 2^{i+1} = \sum_{0 \le j \le i+1} a_j \cdot 2^j + \sum_{0 \le j \le i+1} b_j \cdot 2^j$$

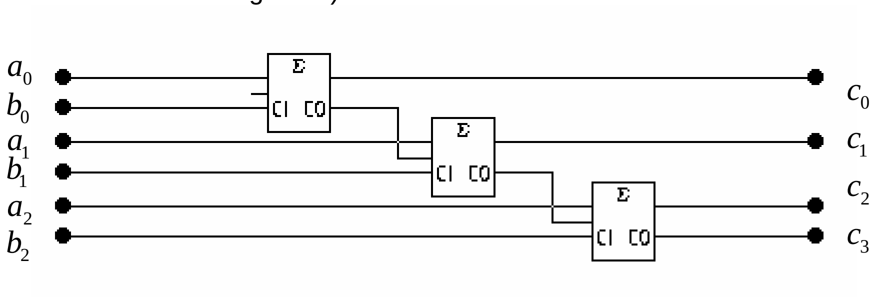
$$\Leftrightarrow \quad u_{i+2} \cdot 2^{i+2} + c_{i+1} \cdot 2^{i+1} + \sum_{0 \le j \le i} c_j \cdot 2^j = \sum_{0 \le j \le i+1} a_j \cdot 2^j + \sum_{0 \le j \le i+1} b_j \cdot 2^j$$

$$\overset{\text{Gleichung des Volladdierers}}{\Leftrightarrow} \quad u_{i+1} \cdot 2^{i+1} + a_{i+1} \cdot 2^{i+1} + b_{i+1} \cdot 2^{i+1} + \sum_{0 \le j \le i} c_j \cdot 2^j = \sum_{0 \le j \le i+1} a_j \cdot 2^j + \sum_{0 \le j \le i+1} b_j \cdot 2^j$$

$$\overset{I.V.}{\Leftrightarrow} \quad \sum_{0 \le j \le i} a_j \cdot 2^j + \sum_{0 \le j \le i} b_j \cdot 2^j + a_{i+1} \cdot 2^{i+1} + b_{i+1} \cdot 2^{i+1} = \sum_{0 \le j \le i+1} a_j \cdot 2^j + \sum_{0 \le j \le i+1} b_j \cdot 2^j$$

(v) Der Algorithmus benötigt $3k + 2$ Schritte.

(vi) Schaltkreis für $k = 3$ (Wenn ihr eure Aufgabenzettel nachträglich ändert, solltet ihr das auch mal bekannt geben!)



Aufgabe 4.3

$$!\exists x : \varphi(x) \Leftrightarrow \left(\neg \forall x : \neg \varphi(x)\right) \wedge \left(\forall y : \left(\neg \varphi(y) \vee y = x\right)\right)$$

Aufgabe 4.4

(i) $7^a = 2^y$

$$\Leftrightarrow \quad \ln 7^a = \ln 2^y$$

$$\Leftrightarrow \quad a \cdot \ln 7 = y \cdot \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{a \cdot \ln 7}{\ln 2}$$

(ii) $\log_7 x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 7}$

Aufgabe 4.5

(i) $(6+1+i\cdot 0)(6-i\cdot 0)=7\cdot 6=42$

(ii) $\dfrac{4+0\cdot i}{6+0\cdot i}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

(iii) $\left|(2+2)-3i(0+1)\right|=|4-3i|$

$$\begin{aligned}&=\sqrt{4^2+(-3)^2}\\&=\sqrt{16+9}\\&=\sqrt{25}\\&=5\end{aligned}$$

Aufgabe 4.6

(i) Stelle deine Matrikelnummer dezimal, hexdezimal, oktal, 3-adisch und binär dar.

Dezimal: 6256800

Hexadezimal: 5F78A0

Da $16^5 < 6256800 < 16^6$ folgt mit $k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le 5$:

k	16^k	$\left\lfloor \frac{a_{k+1}}{16^k} \right\rfloor$	$a^k = \left(a^{k+1} - \left\lfloor \frac{a_{k+1}}{16^k} \right\rfloor \cdot 16^k\right)$
			6256800
5	1048576	**5**	1013920
4	65536	**F**	30880
3	4096	**7**	2208
2	256	**8**	160
1	16	**A**	0
0	1	**0**	0

Oktal: 27674240

Da $8^7 < 6256800 < 8^8$ folgt mit $k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le 9$:

k	8^k	$\left\lfloor \frac{a_{k+1}}{8^k} \right\rfloor$	$a^k = \left(a^{k+1} - \left\lfloor \frac{a_{k+1}}{8^k} \right\rfloor \cdot 8^k\right)$
			6256800
7	2097152	**2**	2062496
6	262144	**7**	227488
5	32768	**6**	30880
4	4096	**7**	2208
3	512	**4**	160
2	64	**2**	32
1	8	**4**	0
0	1	**0**	0

3-adisch: 102202212201100

Da $3^{14} < 6256800 < 3^{15}$ folgt mit $k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 14$:

k	3^k	$\left\lfloor \frac{a_{k+1}}{3^k} \right\rfloor$	$a^k = \left(a^{k+1} - \left\lfloor \frac{a_{k+1}}{3^k} \right\rfloor \cdot 3^k \right)$
			6256800
14	4782969	**1**	1473831
13	1594323	**0**	1473831
12	531441	**2**	410949
11	177147	**2**	56655
10	59049	**0**	56655
9	19683	**2**	17289
8	6561	**2**	4167
7	2187	**1**	1980
6	729	**2**	522
5	243	**2**	36
4	81	**0**	36
3	27	**1**	9
2	9	**1**	0
1	3	**0**	0
0	1	**0**	0

Binär: 101 1111 0111 1000 1010 0000

Da $2^{22} < 6256800 < 2^{23}$ folgt mit $k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 22$:

k	2^k	$\left\lfloor \frac{a_{k+1}}{2^k} \right\rfloor$	$a^k = \left(a^{k+1} - \left\lfloor \frac{a_{k+1}}{2^k} \right\rfloor \cdot 2^k \right)$
			6256800
22	4194304	**1**	2062496
21	2097152	**0**	2062496
20	1048576	**1**	1013920
19	524288	**1**	489632
18	262144	**1**	227488
17	131072	**1**	96416
16	65536	**1**	30880
15	32768	**0**	30880
14	16384	**1**	14469
13	8192	**1**	6304
12	4096	**1**	2208
11	2048	**1**	160
10	1024	**0**	160
9	512	**0**	160
8	256	**0**	160
7	128	**1**	32
6	64	**0**	32
5	32	**1**	0
4	16	**0**	0
3	8	**0**	0
2	4	**0**	0
1	2	**0**	0
0	1	**0**	0

(ii) $\left(92a782\right)_{16} + \left(b7a10f\right)_{16}$

		9	2	A	7	8	2
+		B	7	A	1	0	F
	1		1			1	
	1	4	A	4	8	9	1

(iii) $\left(626053\right)_{8} + \left(26745\right)_{8}$

	6	2	6	0	5	3	·	2	6	7	4	5
		1	4	5	4	1	2	6	0	0	0	0
			4	6	0	4	4	0	2	0	0	0
				5	4	3	2	4	5	5	0	0
					3	1	3	0	2	5	4	0
+						3	7	5	6	3	2	7
		1	2	1	1	2	2	2	1			
		2	2	1	4	6	4	1	0	5	6	7

(iv) $\left(1001\ 0110\ 1001\ 0110\ 0110\ 1001\right)_2 = \left(2^{23} + 2^{20} + 2^{18} + 2^{17} + 2^{15} + 2^{12} + 2^{10} + 2^{9} + 2^{6} + 2^{5} + 2^{3} + 2^{0}\right)_{10}$

$= \left(9868905\right)_{10}$

(v) $\left(1001\ 0110,\ 1001\ 0110\ 0110\ 1001\right)_2 = \left(2^{7} + 2^{4} + 2^{2} + 2^{1} + 2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-6} + 2^{-7} + 2^{-10} + 2^{-11} + 2^{-13} + 2^{-16}\right)$

$$= \left(\frac{9868905}{65536}\right)_{10}$$

$$= \left(150\frac{38505}{65536}\right)_{10}$$