Aufgabe 3.1

(i) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ (wahre Aussage)

Verneint: $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$ (falsche Aussage)

(ii) $\exists z \in \mathbb{C} : \forall x \in \mathbb{R} : |z| > x$ (falsche Aussage)

Verneint: $\forall z \in \mathbb{C} : \exists x \in \mathbb{R} : |z| \leq x$ (wahre Aussage)

(iii) $\forall s \in MFI1 : \exists p \in \{Pizzen\} : s \text{ bekommt von } p$

wahre Aussage, falls jeder Student von der Pizza ist und die Pizza groß genug ist
Verneint: $\exists s \in MFI1 : \forall p \in \{Pizzen\} : s \text{ bekommt nicht von } p$

unter der Annahme, dass die nicht verneinte Aussage wahr ist, muss diese natürlich falsch sein

(iv) $\exists p \in \{Pizzen\} : \forall s \in MFI1 : s \text{ bekommt von } p$

Verneint: $\forall p \in \{Pizzen\} : \exists s \in MFI1 : s \text{ bekommt nicht von } p$

gleiche Aussage wie (iii), also auch gleiche Wahrheitswerte wie in (iii)

Aufgabe 3.2

(i)

$$\varphi + \overline{\varphi} = 1 \qquad\qquad \varphi \cdot \overline{\varphi} = -1$$

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5} = 1 \qquad (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}) \cdot (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}) = -1$$

$$1 = 1 \text{ und } \qquad -1 = -1 \text{ (wahre Aussagen)}$$

(ii)

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{5}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

Lösen der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ liefert $x_1 = \varphi$ und $x_2 = \overline{\varphi}$, also sind die zu prüfenden Gleichungen richtig.

(iii) Es seien $F_0 := 0$, $F_1 := 1$, $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ (für $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$)

Zu Zeigen: $F_n = \frac{1}{5}\sqrt{5}\varphi^n - \frac{1}{5}\sqrt{5}\overline{\varphi}^n$ (für $n \geq 0$)

I.A.:

a. Für $n = 0$ soll gelten

$$\frac{1}{5}\sqrt{5}\varphi^n - \frac{1}{5}\sqrt{5}\overline{\varphi}^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{5}\sqrt{5}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right)^0 - \frac{1}{5}\sqrt{5}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right)^0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{5}\sqrt{5} - \frac{1}{5}\sqrt{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 0$$

(wahre Aussage)

b. Für $n=1$ soll gelten

$$\frac{1}{5}\sqrt{5}\varphi^n - \frac{1}{5}\sqrt{5}\overline{\varphi}^n = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{5}\sqrt{5}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right)^1 - \frac{1}{5}\sqrt{5}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right)^1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{5}\sqrt{5}\,\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{5}\sqrt{5}\,\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{5} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 1=1$$

(wahre Aussage)

I.S.: Wir zeigen: Gilt die Gleichung für ein beliebiges, festes n, dann gilt sie auch für $n+1$.

$$\begin{aligned}
F_{n+1} &= \frac{1}{5}\sqrt{5}\varphi^{n+1} - \frac{1}{5}\sqrt{5}\overline{\varphi}^{n+1} \\
&= \frac{1}{5}\sqrt{5}\left(\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{5}\sqrt{5}\left(\varphi^{n} - \overline{\varphi}^{n} + \varphi^{n-1} - \overline{\varphi}^{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{5}\sqrt{5}\varphi^{n} - \frac{1}{5}\sqrt{5}\overline{\varphi}^{n} + \frac{1}{5}\sqrt{5}\varphi^{n-1} - \frac{1}{5}\sqrt{5}\overline{\varphi}^{n-1} \\
&= F_n + F_{n-1} \\
&= F_{(n+1)-1} + F_{(n+1)-2}
\end{aligned}$$

Bleibt zu Zeigen, dass $\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1} = \varphi^{n} - \overline{\varphi}^{n} + \varphi^{n-1} - \overline{\varphi}^{n-1}$:

$$\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1} = \varphi^{n} - \overline{\varphi}^{n} + \varphi^{n-1} - \overline{\varphi}^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi^{n} - \overline{\varphi}^{n} + \varphi^{n-1} - \overline{\varphi}^{n-1} - \left(\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{\varphi}^{n+1} - \overline{\varphi}^{n} - \overline{\varphi}^{n-1} - \varphi^{n+1} + \varphi^{n} + \varphi^{n-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{\varphi}^{n-1}\left(\overline{\varphi}^{2} - \overline{\varphi} - 1\right) - \varphi^{n-1}\left(\varphi^2 - \varphi - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{\varphi}^{n-1}\left(\overline{\varphi}^{2} - \left(\overline{\varphi} + 1\right)\right) - \varphi^{n-1}\left(\varphi^2 - \left(\varphi + 1\right)\right) = 0$$

Ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist. In (ii) haben wir gezeigt, dass $\overline{\varphi}^{2} = \overline{\varphi}+1$ und $\varphi^2 = \varphi+1$, also haben beide Produkte das Ergebnis 0. Somit ist auch das Ergebnis der Differenz 0.

■

Aufgabe 3.3

Wir definieren für $m,n \in \mathbb{N}$: I. $m+0 := m$

II. $m+n^+ := \left(m+m\right)^+$

Zu Zeigen: $\left(m+n\right)+k = m+\left(n+k\right)$ für $m,n,k \in \mathbb{N}$

I.A.: Wir zeigen, die Aussage gilt für ein beliebiges, festes k. Wir wählen $k=0$:

$$\left(m+n\right)+0 \overset{\text{vgl. I}}{=} m+n \overset{\text{vgl. I}}{=} m+\left(n+0\right)$$

I.S.: Wir zeigen, gilt die Aussage für ein beliebiges, festes k, dann gilt sie auch für k^+:

$$\begin{aligned}(m+n)+k^+ &\overset{\text{vgl. II}}{=} ((m+n)+k)^+ \\ &\overset{\text{vgl. IV}}{=} (m+(n+k))^+ \\ &\overset{\text{vgl. II}}{=} \left(m+(n+k)^+\right) \\ &\overset{\text{vgl. II}}{=} \left(m+(n+k^+)\right) \\ &= m+(n+k^+)\end{aligned}$$

■

Aufgabe 3.4

Zu zeigen: $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$

Wir beweisen durch Widerspruch, also nehmen wir an, es sei $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$.

Also $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$, mit $p, q \in \mathbb{N}$, $\frac{p}{q}$ sei ein gekürzter Bruch

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\quad & 5 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 5 = \frac{p^2}{q^2} \\ \Leftrightarrow\quad & 5\cdot q^2 = p^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 5 \mid p^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 5 \mid p\end{aligned}$$

Es muss somit ein $r \in \mathbb{N}$ geben, sodass gilt: $p = 5\cdot r$

Einsetzen von $p = 5\cdot r$ in $5\cdot q^2 = p^2$ ergibt

$$\begin{aligned}& 5\cdot q^2 = (5\cdot r)^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 5\cdot q^2 = 25\cdot r^2 \\ \Leftrightarrow\quad & q^2 = 5\cdot r^2\end{aligned}$$

Also gilt $5 \mid q^2$ und somit auch $5 \mid q$, woraus folgt: $q = 5\cdot s$ (mit $s \in \mathbb{N}$).

Einsetzen von $k = 5\cdot s$ in $k^2 = 5\cdot r^2$ ergibt:

$$\begin{aligned}& (5\cdot s)^2 = 5\cdot r^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 25\cdot s^2 = 5\cdot r^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 5\cdot s^2 = r^2\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis steht jedoch im Widerspruch zu der Annahme, dass $\frac{p}{q}$ ein gekürzter Bruch ist.

Somit ist $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$. ■

Aufgabe 3.5

(i)
$$\sum_{1\le j\le 5}\frac{1}{j^2-2}=\frac{1}{1^2-2}+\frac{1}{2^2-2}+\frac{1}{3^2-2}+\frac{1}{4^2-2}+\frac{1}{5^2-2}$$
$$=\frac{1}{-1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{23}$$
$$=-\frac{39}{161}$$

(ii)
$$\sum_{0\le j\le 7}(2j+1)=(2\cdot 0+1)+(2\cdot 1+1)+(2\cdot 2+1)+(2\cdot 3+1)+(2\cdot 4+1)+(2\cdot 5+1)+(2\cdot 6+1)+(2\cdot 7+1)$$
$$=1+3+5+7+9+11+13+15$$
$$=64$$

(iii)
$$\sum_{0\le j\le 100}(2j+1)=10201$$

(iv)
$$\prod_{1\le k\le 5}(3k-9)=(3\cdot 1-9)(3\cdot 2-9)(3\cdot 3-9)(3\cdot 4-9)(3\cdot 5-9)$$
$$=-6\cdot(-3)\cdot 0\cdot 3\cdot 6$$
$$=0$$

(v)
$$\prod_{1\le l\le 5}(3k-9)=(3k-9)(3k-9)(3k-9)(3k-9)(3k-9)$$
$$=243(k-3)^5$$
$$=243k^5-3645k^4-21870k^3-65610k^2-59049$$

(vi)
$$\prod_{0\le k\le 3}\sum_{0\le l<k}(2l-1)=\left(\sum_{0\le l<0}(2l-1)\right)\left(\sum_{0\le l<1}(2l-1)\right)\left(\sum_{0\le l<2}(2l-1)\right)\left(\sum_{0\le l<3}(2l-1)\right)$$
$$=0\cdot\ldots$$
$$=0$$

(vii)
$$\sum_{0\le k\le 3}\prod_{0\le l<k}(2l-1)=\left(\prod_{0\le l<0}(2l-1)\right)+\left(\prod_{0\le l<1}(2l-1)\right)+\left(\prod_{0\le l<2}(2l-1)\right)+\left(\prod_{0\le l<3}(2l-1)\right)$$
$$=1+(-1)+(-1)\cdot 1+(-1)\cdot 1\cdot 3$$
$$=-4$$