3. Übungsblatt zu Mathematik für Informatiker I, WS 2003/04

JOACHIM VON ZUR GATHEN, OLAF MÜLLER, MICHAEL NÜSKEN

Abgabe bis Freitag, 7. November 2003, 11^{11}
in den jeweils richtigen grünen oder roten Kasten auf dem D1-Flur.

Aufgabe 3.1 (Logische Aussagen). (4 Punkte)

Verneine folgende Aussagen und vereinfache die Negation. Bestimme den Wahrheitswert der ursprünglichen und negierten Aussagen (oder erläutere).

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ x^2 \geq 0$.

(ii) $\exists z \in \mathbb{C}\colon\ \forall x \in \mathbb{R}\colon\ |z| > x$.

(iii) $\forall s \in$ MFI1: $\exists p \in \{$Pizzen$\}$: s bekommt von p.

(iv) $\exists p \in \{$Pizzen$\}$: $\forall s \in$ MFI1: s bekommt von p.

Dabei ist MFI1 natürlich die Menge aller Mathematik-für-Informatik-I-Studierenden.

Aufgabe 3.2 (Induktion, Fibonacci). (4 Punkte)

Die Fibonacci-Zahlen sind definiert durch

$$\begin{aligned} F_0 &:= 0, \\ F_1 &:= 1, \\ F_n &:= F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{für } n \geq 2. \end{aligned}$$

Sei jetzt $\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $\overline{\varphi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Zeige:

(i) $\varphi + \overline{\varphi} = 1$ und $\varphi \cdot \overline{\varphi} = -1$.

(ii) $\varphi^2 = \varphi + 1$ und $\overline{\varphi}^2 = \overline{\varphi} + 1$ (mit anderen Worten: φ und $\overline{\varphi}$ sind die Nullstellen von $x^2 - x - 1$).

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$F_n = \frac{1}{5}\sqrt{5}\ \varphi^n - \frac{1}{5}\sqrt{5}\ \overline{\varphi}^n.$$

Aufgabe 3.3 (Peano-Axiome). (4 Punkte)

In den Peano-Axiomen wird zunächst nur die Nachfolgerfunktion $n \mapsto n^+$ eingeführt. Die Addition kann dann durch die folgende Rekursion eingeführt werden:

$$m + 0 := m,$$
$$m + n^+ := (m + n)^+$$

für $m, n \in \mathbb{N}$. Nun muss man allerdings die Gesetze der Addition überprüfen. Beweise $(m + n) + k = m + (n + k)$ für $m, n, k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3.4 (Rational). (3 Punkte)

Beweise, dass $\sqrt{5}$ nicht rational ist.

Aufgabe 3.5 (Summen- und Produktzeichen). (7 Punkte)

(i) Berechne $\sum_{1 \leq j \leq 5} \frac{1}{j^2 - 2}$.

(ii) Berechne $\sum_{0 \leq j \leq 7} (2j + 1)$.

(iii) Berechne $\sum_{0 \leq j \leq 100} (2j + 1)$.

(iv) Berechne $\prod_{1 \leq k \leq 5} (3k - 9)$.

(v) Berechne $\prod_{1 \leq \ell \leq 5} (3k - 9)$. [Sic!]

(vi) Berechne $\prod_{0 \leq k \leq 3} \sum_{0 \leq \ell < k} (2\ell - 1)$.

(vii) Berechne $\sum_{0 \leq k \leq 3} \prod_{0 \leq \ell < k} (2\ell - 1)$.

3. Übungsblatt zu Mathematik für Informatiker I, WS 2003/04, Mündlicher Teil

JOACHIM VON ZUR GATHEN, OLAF MÜLLER, MICHAEL NÜSKEN

Mündliche Aufgabe 3.6 (Logische Aussagen).

Verneine folgende Aussagen und vereinfache die Negation. Bestimme den Wahrheitswert der ursprünglichen und negierten Aussagen (oder erläutere).

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ x^3 \geq 0$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exists z \in \mathbb{C}\colon\ |z^3 - 1| > x$.

(iii) $\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \delta < \varepsilon^2$.

(iv) $\exists \delta > 0\colon \forall \varepsilon > 0\colon \delta < \varepsilon^2$.

Mündliche Aufgabe 3.7 (Induktion, Fibonacci).

Die Fibonacci-Zahlen sind definiert durch

$$\begin{aligned} F_0 &:= 0, \\ F_1 &:= 1, \\ F_n &:= F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{für } n \geq 2. \end{aligned}$$

Zeige: jede dritte Fibonaccizahl ist gerade.

Mündliche Aufgabe 3.8 (Peano-Axiome).

In den Peano-Axiomen wird zunächst nur die Nachfolgerfunktion $n \mapsto n^+$ eingeführt. Die Addition kann dann durch die folgende Rekursion eingeführt werden:

$$\begin{aligned} m + 0 &:= m, \\ m + n^+ &:= (m + n)^+ \end{aligned}$$

für $m, n \in \mathbb{N}$. Nun muss man allerdings die Gesetze der Addition überprüfen. Beweise $m + 0 = 0 + m$ für $m \in \mathbb{N}$.

Mündliche Aufgabe 3.9 (Rational).

Beweise, dass $\sqrt{3}$ nicht rational ist.

Mündliche Aufgabe 3.10 (Summen- und Produktzeichen).

(i) Berechne $\sum_{1 \leq j \leq 5} \frac{1}{j^2+1}$.

(ii) Berechne $\sum_{0 \leq j \leq 4} (3j + 2)$.

(iii) Berechne $\sum_{1 \leq k \leq 5} (2k - 1)$.

(iv) Berechne $\prod_{1 \leq k \leq 5} (2k - 1)$.

(v) Berechne $\prod_{0 \leq k \leq 3} \sum_{0 \leq \ell < k} \ell$.

(vi) Berechne $\sum_{0 \leq k \leq 3} \prod_{0 \leq \ell < k} \ell$.