Aufgabe 2.1

(i) Gib jeweils einen logischen Ausdruck für u, y_3, y_2, y_1 und y_0 an.

$$u = x_0\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3$$

$$y_3 = x_0x_1x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3$$

$$y_2 = x_0x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_0}\,\overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_0\overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_0}x_1x_2\overline{x_3}$$
$$= \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_0}x_1\overline{x_3} \vee x_0x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}$$

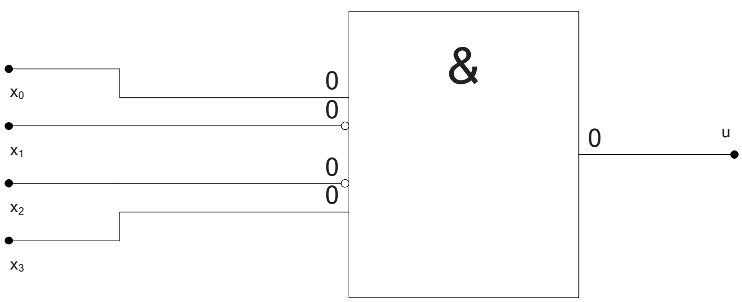
$$y_1 = x_0\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_0}x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_0\overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_0}x_1x_2\overline{x_3}$$
$$= x_0\overline{x_1}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_0}x_1\overline{x_3}$$

$$y_0 = \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_0}x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_0}\,\overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_0}x_1x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3$$
$$= \overline{x_0}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3$$

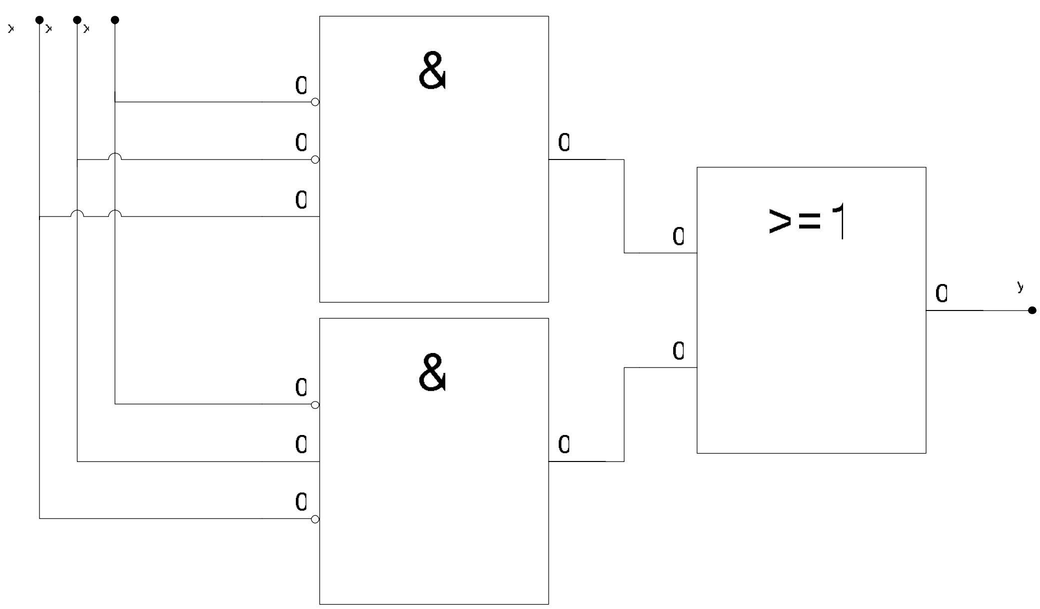
Hinweise zur Schreibweise:
Zur besseren Lesbarkeit gelten folgende Vereinbarungen:
$\neg a$ wird geschrieben als $\overline{a}$ und
$a \wedge b$ wird geschrieben als ab

Außerdem gilt für Wahrheitswerte:
$0 \mathrel{\hat{=}} f$ und $1 \mathrel{\hat{=}} w$

(ii) Zeichne einen Schaltkreis für drei der Bits, der nur die Gatter $\neg$, $\vee$ und $\wedge$ verwendet.



Schaltnetz für u



Schaltnetz für y_1

(iii) **Was tut diese Funktion?**
Die Funktion kann die Zahlen 1 bis 9, sowie das Vorhandensein eines Übertrags (u) darstellen.

Aufgabe 2.2

Finde den Fehler in der Induktion

Bei einer vollständigen Induktion schließt man von einem beliebigen, aber festen n auf die nachfolgenden n. In diesem Beispiel wird jedoch von zwei verschiedenen n in der Induktionsvoraussetzung ausgegangen.

Aufgabe 2.3

Prüfe, ob die folgenden Aussagen Tautologien sind und beweise.

Ein Ausdruck ist eine Tautologie, wenn er immer wahr ist, d.h. in diesem Fall müssen beide Teilausdrücke rechts und links des Äquivalenz-Zeichens gleich sein.

$$((p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q)) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$$
$$\Leftrightarrow \quad (\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q}) \Leftrightarrow pq \vee \overline{p}\overline{q}$$
$$\Leftrightarrow \quad (\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q}) \Leftrightarrow pq \vee \overline{p}\overline{q}$$
$$\Leftrightarrow \quad \overline{p}p \vee \overline{p}\overline{q} \vee qp \vee q\overline{q} \Leftrightarrow pq \vee \overline{p}\overline{q}$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 \vee \overline{p}\overline{q} \vee qp \vee 0 \Leftrightarrow pq \vee \overline{p}\overline{q}$$
$$\Leftrightarrow \quad \overline{p}\overline{q} \vee qp \Leftrightarrow pq \vee \overline{p}\overline{q}$$
$$\Leftrightarrow \quad pq \vee \overline{p}\overline{q} \Leftrightarrow pq \vee \overline{p}\overline{q}$$

Der Ausdruck ist eine Tautologie.

$$((a \Rightarrow (b \wedge (c \Rightarrow d))) \vee (b \oplus \neg c)) \Leftrightarrow (\neg a \vee b \vee \neg c)$$
$$\Leftrightarrow \quad ((\overline{a} \vee (b \wedge (\overline{c} \vee d))) \vee (bc \vee \overline{b}\overline{c})) \Leftrightarrow (\overline{a} \vee b \vee \overline{c})$$
$$\Leftrightarrow \quad ((\overline{a} \vee (b\overline{c} \vee bd)) \vee (bc \vee \overline{b}\overline{c})) \Leftrightarrow (\overline{a} \vee b \vee \overline{c})$$
$$\Leftrightarrow \quad (\overline{a} \vee b\overline{c} \vee bd \vee bc \vee \overline{b}\overline{c}) \Leftrightarrow (\overline{a} \vee b \vee \overline{c})$$
$$\Leftrightarrow \quad (\overline{a} \vee bc \vee b\overline{c} \vee bd \vee \overline{b}\overline{c}) \Leftrightarrow (\overline{a} \vee b \vee \overline{c})$$
$$\Leftrightarrow \quad (\overline{a} \vee b \vee bd \vee \overline{b}\overline{c}) \Leftrightarrow (\overline{a} \vee b \vee \overline{c})$$
$$\Leftrightarrow \quad (\overline{a} \vee b \vee \overline{b}\overline{c}) \Leftrightarrow (\overline{a} \vee b \vee \overline{c})$$
$$\Leftrightarrow \quad (\overline{a} \vee b \vee \overline{b} \wedge b \vee \overline{c}) \Leftrightarrow (\overline{a} \vee b \vee \overline{c})$$
$$\Leftrightarrow \quad (\overline{a} \vee 1 \wedge b \vee \overline{c}) \Leftrightarrow (\overline{a} \vee b \vee \overline{c})$$
$$\Leftrightarrow \quad (\overline{a} \vee b \vee \overline{c}) \Leftrightarrow (\overline{a} \vee b \vee \overline{c})$$

Der Ausdruck ist eine Tautologie.

Aufgabe 2.4

Zu zeigen: $n^2 \le 2^n$

I.V. Wir zeigen, die Gleichung gilt für ein beliebiges, festes $n \ge 4$ ($n \in \mathbb{N}$), da die Behauptung für $n = 3$ nicht gilt ($3^2 \le 2^3 \Leftrightarrow 9 \le 8$: falsche Aussage).

Für $n = 1$ und $n = 2$ zeigen wir durch Einsetzen, dass die Aussage für diese Werte von n wahr ist:
$1^2 \le 2^1 \Leftrightarrow 1 \le 2$ und $2^2 \le 2^2 \Leftrightarrow 4 \le 4$: wahre Aussagen

Für die Induktionsvoraussetzung wählen wir $n = 4$, damit ergibt sich $4^2 \le 2^4 \Leftrightarrow 16 \le 16$ (wahre Aussage)

I.S. Wir zeigen: gilt die Gleichung für ein beliebiges, festes $n \ge 4$ (I.V.), dann gilt sie auch für $n+1$

$$(n+1)^2 \le 2^{n+1}$$
$$\Leftrightarrow \quad (n+1)^2 \le 2^n \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow \quad (n+1)^2 \le n^2 \cdot 2 \le 2^n \cdot 2 \text{ gemäß I.V. ist } n^2 \le 2^n\text{, also gilt } n^2 \le 2^n \Leftrightarrow n^2 \cdot 2 \le 2^n \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow \quad (n+1)^2 \le 2n^2$$
$$\Leftrightarrow \quad n^2 + 2n + 1 \le 2n^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 2n + 1 \le n^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 \le n^2 - 2n$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 + 1 \le n^2 - 2n + 1$$
$$\Leftrightarrow \quad 2 \le (n-1)^2 \qquad \text{Diese Aussage ist für alle } n \ge 4 \text{ wahr.}$$

■

Aufgabe 2.5

Wenn alle a_n Vielfache von 133 sein sollen, muss folgende Gleichung gelten:
$a_n \bmod 133 = 0$ mit $a_n := 11^{n+1} + 12^{2n-1}$

I.V. Wir zeigen: die Gleichung gilt für ein beliebiges, festes n ($n \in \mathbb{N}$).
Wir wählen $n = 1$: $(11^{1+1} + 12^{2\cdot 1-1}) \bmod 133 = (11^2 + 12^1) \bmod 133 = 133 \bmod 133 = 0$ (wahre Aussage)

I.S. Wir zeigen: gilt die Gleichung für ein beliebiges, festes n (I.V.), dann gilt sie auch für $n+1$.

$$(11^{n+2} + 12^{2(n+1)-1}) \bmod 133 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (11^{n+1} \cdot 11 + 12^{2n-1} \cdot 12^2) \bmod 133 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (11^{n+1} \cdot 11 + 12^{2n-1} \cdot 144) \bmod 133 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (11^{n+1} \cdot 11 + 12^{2n-1} \cdot (11 + 133)) \bmod 133 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (11 \cdot (11^{n+1} + 12^{2n-1}) + 12^{2n-1} \cdot 133) \bmod 133 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (11 \cdot (11^{n+1} + 12^{2n-1})) \bmod 133 + (12^{2n-1} \cdot 133) \bmod 133 = 0$$

Laut I.V. gilt $(11^{n+1} + 12^{2n-1}) \bmod 133 = 0$, also ist auch $(11 \cdot (11^{n+1} + 12^{2n-1})) \bmod 133 = 0$, da Vielfaches

Da $12^{2n-1} \cdot 133$ ein Vielfaches von 133 ist, muss auch $(12^{2n-1} \cdot 133) \bmod 133 = 0$ sein.

Folglich ergibt der Gesamtausdruck 0, ist also Vielfaches von 133.

■