2. Übungsblatt zu Mathematik für Informatiker I, WS 2003/04

Joachim von zur Gathen, Olaf Müller, Michael Nüsken

Abgabe bis Freitag, 31. Oktober 2003, 11^{11}
in den jeweils richtigen grünen oder roten Kasten auf dem D1-Flur.

Aufgabe 2.1 (Schaltkreise). (4 Punkte)

Ein mehrziffriger Digitalzähler wird aus einzelnen Zählziffern aufgebaut. Für den Zählvorgang wird folgende Funktion gebraucht:

x_3	x_2	x_1	x_0	u	y_3	y_2	y_1	y_0
f	f	f	f	f	f	f	f	w
f	f	f	w	f	f	f	w	f
f	f	w	f	f	f	f	w	w
f	f	w	w	f	f	w	f	f
f	w	f	f	f	f	w	f	w
f	w	f	w	f	f	w	w	f
f	w	w	f	f	f	w	w	w
f	w	w	w	f	w	f	f	f
w	f	f	f	f	w	f	f	w
w	f	f	w	w	f	f	f	f

.

(i) Gib jeweils einen logischen Ausdruck für u, y_3, y_2, y_1 und y_0 an.

(ii) Zeichne je einen Schaltkreis für drei der Bits, der nur die Gatter $\neg$, $\vee$ und $\wedge$ verwendet.

(iii) Was tut diese Funktion?

Aufgabe 2.2 (Induktion). (4 Punkte)

Es heißt, nachts seien alle Katzen grau. Wir zeigen, dass zumindest alle Katzen die gleiche Farbe haben! Oder?

Satz. *Alle Katzen haben die gleiche Farbe.*

Beweis. Wir zeigen per Induktion: Alle Katze in einer geordneten Liste von n Katzen haben die gleiche Farbe.

Induktionsanfang: In einer Liste mit nur einer Katze haben natürlich alle Katzen die gleiche Farbe.

Induktionsschritt: Wir betrachten eine Liste mit $n + 1$ Katzen. Die Katzen mit den Nummern 1 bis n bilden eine Liste mit n Katzen und haben also nach Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Farbe. Aber auch die Katzen 2 bis $n+1$ bilden eine Liste mit n Katzen und haben nach Induktionsvoraussetzung die gleiche Farbe. Da die Katze Nummer 2 in beiden Listen ist, haben also alle $n+1$ Katzen die gleiche Farbe.

Induktionsschluss: Alle Katzen haben die gleiche Farbe. □

Finde den Fehler und begründe.

Aufgabe 2.3 (Tautologien). (4 Punkte)

Prüfe, ob die folgenden Aussagen Tautologien sind, und beweise.

(i) $((p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q)) \iff (p \Leftrightarrow q)$.

(ii) $((a \Rightarrow (b \wedge (c \Rightarrow d))) \vee (b \oplus \neg c)) \iff (\neg a \vee b \vee \neg c)$.

Aufgabe 2.4 (Induktion). (4 Punkte)

Bestimme die natürlichen Zahlen n für die $n^2 \leq 2^n$ gilt. Beweise Dein Ergebnis. [Tipp: Induktion.]

Aufgabe 2.5 (Induktion). (4 Punkte)

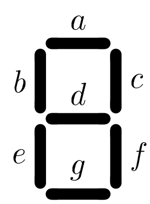
Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei $a_n := 11^{n+1} + 12^{2n-1}$. Zeige durch vollständige Induktion, dass alle a_n Vielfache von 133 sind.

2. Übungsblatt zu Mathematik für Informatiker I, WS 2003/04, Mündlicher Teil

Joachim von zur Gathen, Olaf Müller, Michael Nüsken

Mündliche Aufgabe 2.6 (Schaltkreise).

Ein mehrziffriger Digitalzähler wird aus einzelnen Zählziffern aufgebaut. Die Ziffern werden durch eine Siebensegmentanzeige dargestellt:



Intern werden die Ziffern in Binärdarstellung durch vier Bits dargestellt:

Ziffer	x_3	x_2	x_1	x_0
0	f	f	f	f
1	f	f	f	w
2	f	f	w	f
3	f	f	w	w
4	f	w	f	f
5	f	w	f	w
6	f	w	w	f
7	f	w	w	w
8	w	f	f	f
9	w	f	f	w

.

(i) Zeichne die Ziffern 0 bis 9 in der Siebensegmentanzeige.

(ii) Gib jeweils einen logischen Ausdruck für a, b, c, d, e, f an.

(iii) Zeichne je einen Schaltkreis für drei der Segmente, der nur die Gatter $\neg$, $\vee$ und $\wedge$ verwendet.

Mündliche Aufgabe 2.7 (Induktion).

Es heißt, nachts seien alle Katzen grau. Wir zeigen, das stimmt immer! Oder?

Satz. *Alle Katzen sind grau.*

Beweis. Wir zeigen per Induktion: Jede Katze in einer Menge von n Katzen ist grau.

Induktionsanfang: Wir nehmen uns eine graue Katze her. Dann haben wir eine Menge mit einer Katze. Natürlich ist jede Katze darin grau.

Induktionsschritt: Wir betrachten eine Menge mit $n+1$ Katzen. Eine Katze nehmen wir heraus, es bleibt eine Menge mit n Katzen übrig. Nach Induktionsvoraussetzung ist jede Katze in dieser Menge grau. Nun setzen wir eine dieser grauen Katzen beiseite und fügen die zuvor herausgenomme Katze hinzu. Wieder haben wir eine Menge mit n Katzen. Also sind auch diese alle grau. Natürlich ist die beiseite genommene auch grau. Also sind alle $n+1$ Katzen grau.

Induktionsschluss: Alle Katzen sind grau. $\square$

Mündliche Aufgabe 2.8 (Tautologien).

Prüfe, ob die folgenden Aussagen Tautologien sind, und beweise.

(i) $((p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)) \iff q$,

(ii) $((p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p)) \implies (p \Leftrightarrow q)$,

(iii) $\big(\big((a \Leftrightarrow b) \oplus (c \Rightarrow d)\big) \Rightarrow (b \vee d)\big) \iff ((a \Leftrightarrow c) \vee b \vee d)$.

Mündliche Aufgabe 2.9 (Induktion).

Zeige per Induktion

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Mündliche Aufgabe 2.10 (Induktion).

Für jede natürliche Zahl $n \geq 4$ gilt $2^n < n!$.