# Klausurvorbereitung zu Mathematik für Informatiker I, WS 2003/04

JOACHIM VON ZUR GATHEN, OLAF MÜLLER-TOFALL, MICHAEL NÜSKEN

Keine Abgabe — freiwillige Bearbeitung.

Die Klausur zur Vorlesung Mathematik für Informatiker I, WS 2003/04 findet am **16. Februar 2004** von **$09^{00}$-$11^{00}$** in **der Sporthalle und dem Audimax** statt.

*Hinweise zur Klausur*: Kontrollieren Sie die Klausur auf Vollständigkeit: Sie sollte Aufgabe 1 bis Aufgabe NN enthalten. Tragen Sie Name und Matrikelnummer **auf jedem Blatt** ein. Lösungswege und Lösungen sind in die Klausurvorlage (eventuell auf die Rückseiten) einzutragen. Sollte der Platz nicht ausreichen, so stellt die Klausuraufsicht zusätzliches Papier zur Verfügung. **Die Klammerung der Klausur nicht lösen!**

**Nicht mit Bleistift und nicht in Rot schreiben!**

Die Klausur ist eigenständig zu bearbeiten. Als Hilfmittel sind erlaubt: Schreibutensilien, ein Taschenrechner (nichtprogrammierbar, ohne Division mit Rest, ohne Lineare-Algebra-Software) und ein von eigener Hand mit Notizen beidseitig beschriebenes DIN A4-Blatt. Alle anderen Hilfsmittel, auch eigenes Papier, sind verboten!

**Täuschungsversuche können — auch wenn sie erst nachträglich erkannt werden — zum Nichtbestehen dieser Klausur führen.**

**Regelung für Sonderfälle**: Die Studierenden der Studiengänge Medien- und Kulturwissenschaften sowie Nebenfach Informatik brauchen nur Aufgabe 1 bis Aufgabe 8 zu bearbeiten.

**Bitte beachten**: Die Aufgaben auf diesem Blatt dienen der Wiederholung des in der Vorlesung behandelten Stoffes. Aus Art und Auswahl der Aufgaben kann in keiner Weise auf die Aufgaben der Klausur geschlossen werden. Die Klausur wird kürzer sein.

**Zur Klausur** sind ausserdem der Studierendenausweis, ein Lichtbildausweis und gegebenenfalls der Laufzettel **mitzubringen**.

**Aufgabe 1** (Paderborner Allerlei I).

Kreuze bei folgenden Fragen jeweils die richtige(n) Antwort(en) an. Es können auch mehrere Antworten zutreffen. (Eine richtige Lösung gibt jeweils einen Punkt, eine falsche Lösung gibt einen Minuspunkt. Keine Antwort gibt keine Punkte.)

(i) Für reelle Zahlen $a$, $b$ gilt $|a - ib| = a^2 + b^2$. ☐ Wahr ☐ Falsch

(ii) Die Formel $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \quad 1/n < \varepsilon$ ist wahr. ☐ Wahr ☐ Falsch

(iii) Für $a, b, d \in \mathbb{Z}$ gilt: es gibt genau dann $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $sa + tb = d$, wenn $\mathrm{ggT}(a, b) \mid d$. ☐ Wahr ☐ Falsch

(iv) Für $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt: aus $a^2 = 5b^2$ folgt $5 \mid a$. ☐ Wahr ☐ Falsch

(v) Die binär dargestellte Zahl $(101\,1010\,1110\,1101\,0110\,1101\,0110\,1010)_2$ ist gerade. ☐ Wahr ☐ Falsch

**Aufgabe 2** (Schaltkreise).

Sei $\varphi$ die Formel $((a \wedge \neg b) \Rightarrow d) \wedge ((a \wedge d) \Rightarrow (b \wedge \neg c)) \wedge ((a \wedge c) \Rightarrow \neg(b \vee d)$.

(i) Zeichne einen Schaltkreis für die Formel $\varphi$, der nur die Gatter $\wedge$, $\vee$, $\neg$ verwendet.

(ii) Vereinfache $\varphi$.

**Aufgabe 3** (Wahrheitstafeln).

(i) Erstelle eine Wahrheitstafel für die Formel $b \Rightarrow \neg((a \Rightarrow b) \wedge a) \vee c$.

(ii) Finde eine Formel für die durch die folgende Wahrheitstafel dargestellte Funktion:

| $a$ | $b$ | $c$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

**Aufgabe 4** (Induktion).

Sei $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$. Beweise

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \qquad \begin{bmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}^2.$$

*Tipps*: Multipliziere mit $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]^2$. Prüfe, ob $\left[\begin{smallmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{smallmatrix}\right]$ mit $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ kommutiert.

**Aufgabe 5** (Induktion).

Sei $T_0 = 1$, $T_{n+1} = (n+1)T_n + n$. Zeige

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad T_n = 2n! - 1.$$

**Aufgabe 6** (ggT).

Berechne den größten gemeinsamen Teiler $g$ von $a = 166804$ und $b = 140029$ und stelle ihn in der Form $g = sa + tb$ dar.

**Aufgabe 7** (Simultane Kongruenzen).

Bestimme alle Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} x &\equiv 227 \bmod 365, \\ x &\equiv 26 \bmod 31. \end{aligned}$$

**Aufgabe 8** (Modular Potenzieren).

Berechne (schlau)

$$2^{100\,000\,000} \operatorname{rem} 1523.$$

*Hilfe*: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass $1523$ prim ist.

**Aufgabe 9** (Gleichungssysteme über $\mathbb{Q}$).

Betrachte das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 1 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \quad 3 \cdot x_4 &=& 1 \\ 0 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + \quad 0 \cdot x_4 &=& 1 \\ -4 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \quad 0 \cdot x_4 &=& 1 \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + (-2) \cdot x_4 &=& 1 \end{array}$$

über $\mathbb{Q}$.

(i) Bestimme die erweiterte Koeffizientenmatrix.

(ii) Wende das Gauß-Jordan-Verfahren darauf an.

(iii) Bestimme eine Lösung.

(iv) Bestimme alle Lösungen.

**Aufgabe 10** (Gleichungssysteme über $\mathbb{Z}_7$).

Betrachte das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
1{\cdot}x_1{+}4{\cdot}x_2{+}0{\cdot}x_3{+} \quad 3{\cdot}x_4 &= 1\\
0{\cdot}x_1{+}3{\cdot}x_2{+}1{\cdot}x_3{+} \quad 0{\cdot}x_4 &= 1\\
-4{\cdot}x_1{+}1{\cdot}x_2{+}0{\cdot}x_3{+} \quad 0{\cdot}x_4 &= 1\\
1{\cdot}x_1{+}0{\cdot}x_2{+}1{\cdot}x_3{+}(-2){\cdot}x_4 &= 1
\end{aligned}$$

über $\mathbb{Z}_7$.

(i) Bestimme die erweiterte Koeffizientenmatrix.

(ii) Wende das Gauß-Jordan-Verfahren darauf an.

(iii) Bestimme eine Lösung.

(iv) Bestimme alle Lösungen.

**Aufgabe 11** (Matrix invertieren).

Invertiere die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

**Aufgabe 12** (Matrix invertieren).

Invertiere die Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_7^{4\times 4}.$$

**Aufgabe 13** (Gleichungssysteme über $\mathbb{Q}$).

Betrachte das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl}
(-1)\cdot x_1 + \quad 2\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 0\cdot x_4 &=& 2 \\
1\cdot x_1 + (-2)\cdot x_2 + 2\cdot x_3 + 3\cdot x_4 &=& -2 \\
2\cdot x_1 + (-4)\cdot x_2 + 2\cdot x_3 + 4\cdot x_4 &=& -4 \\
4\cdot x_1 + (-8)\cdot x_2 + 5\cdot x_3 + 9\cdot x_4 &=& -8
\end{array}$$

über $\mathbb{Q}$.

(i) Bestimme die erweiterte Koeffizientenmatrix.

(ii) Wende das Gauß-Jordan-Verfahren darauf an.

(iii) Bestimme eine Lösung.

(iv) Bestimme alle Lösungen.

**Aufgabe 14** (Algorithmus „Rücksubstitution“).

Der folgende Algorithmus berechnet die Lösung eines Gleichungssystem, dessen Matrix in oberer Dreiecksgestalt vorliegt und auf der Diagonale steht überall $1$.

**Algorithmus.** Rücksubstitution.

Eingabe: Eine quadratische Matrix $A \in F^{n\times n}$ mit $\forall i \in \{1,\dots,n\} \quad A_{ii} = 1$ und $\forall i,j \in \{1,\dots,n\} \quad i > j \Rightarrow A_{ij} = 0$, sowie ein Vektor $b \in F^n$.
Ausgabe: Ein Vektor $x \in F^n$ mit $A \cdot x = b$.

1. Für $i = n$ abwärts bis $1$ erledige 2–4
2. $\quad x_i \leftarrow b_i$.
3. $\quad$ Für $j = i + 1$ aufwärts bis $n$ erledige
4. $\quad\quad x_i \leftarrow x_i - A_{ij}x_j$.
5. Antworte $x$.

(i) Sei $i \in \{1,\dots,n\}$. Bestimme die Anzahl der arithmetischen Operationen (Additionen, Subtraktionen, Multipikationen, Divisionen), die der $i$-te Durchlauf der inneren Schleife, Zeilen 3–4, durchführt.

(ii) Bestimme die Anzahl der arithmetischen Operationen (Additionen, Subtraktionen, Multipikationen, Divisionen), die der gesamte Algorithmus durchführt.

(iii*) Zeige, dass am Ende von Zeile 4 jeweils

$$x_i = b_i - \sum_{i<k\leq j} A_{ik} x_k$$

gilt.

(iv*) Schließe, dass der Algorithmus korrekt arbeitet, also mit einem $x$ mit $A \cdot x = b$ antwortet.

**Aufgabe 15** (Paderborner Allerlei II).

Kreuze bei folgenden Fragen jeweils die richtige(n) Antwort(en) an. Es können auch mehrere Antworten zutreffen. (Eine richtige Lösung gibt jeweils einen Punkt, eine falsche Lösung gibt einen Minuspunkt. Keine Antwort gibt keine Punkte.)

(i) Der größte gemeinsame Teiler zweier ganzer Zahlen $x$ und $y$ ist immer ein Teiler des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von $x$ und $y$.
☐ Wahr ☐ Falsch

(ii) Die Relation $\{(x, y) \in M \times M \mid x$ ist größer als $y\}$ ist eine Teilordnung auf der Menge $M$ aller Menschen.
☐ Wahr ☐ Falsch

(iii) Die Abbildung $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist
☐ injektiv ☐ surjektiv ☐ bijektiv

(iv) Die Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ a \mapsto \lfloor a/2 \rfloor$ ist
☐ injektiv ☐ surjektiv ☐ bijektiv

(v) Eine Abbildung $f\colon M \to N$ ist surjektiv genau dann, wenn für alle $x \in M$ ein $y \in N$ existiert mit $f(x) = y$.
☐ Wahr ☐ Falsch