[b|d] bernhard dietrich

Mathematik für Informatiker I
Übungsblatt 12
Matrikel-Nr.: 6256800 • Übungsgruppe 1

Aufgabe 12.1

(i) $$5\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 10 & 15\\ 15 & 0 & -10\\ 5 & -5 & 0\end{bmatrix}$$

(ii) $$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 3\\ 4 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

(iii) $$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 9 & -8\\ 2 & -2\end{bmatrix}$$

(iv) $$5\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 4\\ 5 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

(v) $$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 3\\ 4 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

(vi) $$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 2 & 1\\ 2 & 5\end{bmatrix}$$

Aufgabe 12.2

	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{21}	M_{22}	M_{23}	M_{31}	M_{32}	M_{33}
M_{11}	$\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$	✗	✗	✗	✗	✗	✗
M_{12}	✗	✗	✗	$\begin{bmatrix}13\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}13 & 4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}13 & 4 & 3\end{bmatrix}$	✗	✗	✗
M_{13}	✗	✗	✗				$\begin{bmatrix}13\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}13 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}13 & 1 & -6\end{bmatrix}$
M_{21}	$\begin{bmatrix}1 \\ 6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 2 \\ 6 & 12\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 \\ 6 & 12 & 18\end{bmatrix}$	✗	✗	✗	✗	✗	✗
M_{22}	✗	✗	✗	$\begin{bmatrix}13 \\ 12\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}13 & 4 \\ 12 & 13\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}13 & 4 & 3 \\ 12 & 13 & 18\end{bmatrix}$	✗	✗	✗
M_{23}	✗	✗	✗	✗	✗	✗	$\begin{bmatrix}13 \\ 12\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}13 & 1 \\ 12 & 13\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}13 & 1 & -6 \\ 12 & 13 & 18\end{bmatrix}$
M_{31}	$\begin{bmatrix}1 \\ 6 \\ 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 2 \\ 6 & 12 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 \\ 6 & 12 & 18 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$	✗	✗	✗	✗	✗	✗
M_{32}	✗	✗	✗	$\begin{bmatrix}13 \\ 12 \\ -6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}13 & 4 \\ 12 & 13 \\ -6 & -1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}13 & 4 & 3 \\ 12 & 13 & 18 \\ -6 & -1 & 0\end{bmatrix}$	✗	✗	✗
M_{33}	✗	✗	✗	✗	✗	✗	$\begin{bmatrix}13 \\ 12 \\ -6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}13 & 1 \\ 12 & 13 \\ -6 & 2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}13 & 1 & -6 \\ 12 & 13 & 18 \\ -6 & 2 & 9\end{bmatrix}$

Aufgabe 12.3

(i) Das Gleichungssystem lässt sich folgendermaßen als Matrix darstellen und mit Hilfe der Gauß'schen Elimination lösen:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ \\ \\ 4\mathrm{IV}+\mathrm{I} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ \\ 3\mathrm{III}-\mathrm{II} \\ 2\mathrm{IV}+\mathrm{II} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ \mathrm{II}-2\mathrm{III},\ 5\mathrm{II} \\ \\ \mathrm{IV}-4\mathrm{III} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]\begin{matrix} \mathrm{I}-2\mathrm{II},\ \mathrm{I}-\mathrm{III},\ \mathrm{I}+\mathrm{IV},\ 5\mathrm{I} \\ 5\mathrm{II} \\ \\ 2\mathrm{IV} \end{matrix}$$

Die Lösung lässt sich jetzt ablesen und lautet: $\vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \bmod 7$

(ii) Gegenüber i ändert sich nur die 5. Spalte der Matrix, die sich allerdings während der Gauß Elimination nicht weiter verändert. Im letzen Unformungsschritt erhält man dann

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

woraus man die Lösung $\vec{x} = 0 \bmod 7$ ablesen kann.

Aufgabe 12.4

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \text{III-I} \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 9 & -3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \text{3III+2II} \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 9 & -3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 3 & -8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{8IV-III, -1}\cdot\text{I} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 3 & -8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \text{III-9IV, IV:}(\text{-8}) \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 3 & -8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{II+III, II:3} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 15 & -10 & -14 & 41 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 3 & -8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{I-2II, I-3III, I-IV} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Probe:

$$X \cdot A = I_4$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 & -10 & -14 & 41 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 3 & -9 \\ -3 & 2 & 3 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 12.5

(i)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 14 & 3 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & 14 & 3 \end{array}\right] \text{II-3I}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1,4 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{II:}(-10) \\ \text{III+II} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -0,6 & -0,2 \\ 0 & 0 & 1 & 1,4 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{I-4II} \\ \\ \\ \end{array}$$

Entzerrt:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -0,6 & -0,2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1,4 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Die Lösung ist also:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -0,2 \\ 0 \\ 0,3 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} -0,6 \\ 0 \\ 1,4 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ mit } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

(ii) Gegenüber i ändert sich nur die 5. Spalte der Matrix, die sich allerdings während der Gauß Elimination nicht weiter verändert. Im letzen Unformungsschritt erhält man dann

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -0,6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$ woraus man die Lösung

$$\vec{x} = \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} -0,6 \\ 0 \\ 1,4 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ mit } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$ ablesen kann.