12. Übungsblatt zu Mathematik für Informatiker I, WS 2003/04

JOACHIM VON ZUR GATHEN, OLAF MÜLLER-TOFALL, MICHAEL NÜSKEN

Abgabe bis Freitag, 30. Januar 2004, 11^{11}
in den jeweils richtigen grünen oder roten Kasten auf dem D1-Flur.

Aufgabe 12.1 (Matrixoperationen). (3 Punkte)

Berechne über $\mathbb{Q}$.

(i) $5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Berechne über $\mathbb{Z}_7$.

(iv) $5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Aufgabe 12.2 (Matrixmultiplikation). (5 Punkte)

Berechne die Produkte aller folgenden reellen Matrizen, soweit möglich:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \quad M_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad M_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad M_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad M_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Es versteht sich, dass bei den folgenden Aufgaben sämtliche Zwischenschritte in der Lösung notiert werden müssen. Eine Kontrolle der Lösungen durch ein Computeralgebrasystem oder ähnliches ist natürlich möglich, aber nicht ausreichend.

Aufgabe 12.3 (Gleichungssysteme über $\mathbb{Z}_7$). (6 Punkte)

(i) Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + (-1)\cdot x_4 &= 1 \\ 0\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 2\cdot x_3 + \quad 0\cdot x_4 &= 0 \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + \quad 0\cdot x_4 &= 1 \\ 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + (-1)\cdot x_4 &= 1 \end{aligned}$$

über $\mathbb{Z}_7$.

(ii) Bestimme alle Lösungen der Matrixgleichung

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

über $\mathbb{Z}_7$.

Aufgabe 12.4 (Inverse Matrix). (7 Punkte)

Betrachte die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

Bestimme eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $A \cdot X = I_4$. (Hier bezeichnet I_4 die 4×4-Einheitsmatrix.) Beachte, dass damit die Spalten x_1, x_2, x_3, x_4 von X die Lösungen der Gleichungssysteme $A \cdot x_i = e_i$ sind, wobei e_i die i-te Spalte der Einheitsmatrix ist.

Berechne zur Probe $X \cdot A$.

Bemerkung: Man nennt X die *zu A inverse Matrix*.

Aufgabe 12.5 (Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$). (8 Punkte)

(i) Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + \ 4\cdot x_3 + \ 5\cdot x_4 &= 1, \\ 3\cdot x_1 + 6\cdot x_2 + \ 2\cdot x_3 + \ 1\cdot x_4 &= 0, \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 10\cdot x_3 + 14\cdot x_4 &= 3 \end{aligned}$$

über $\mathbb{R}$.

(ii) Bestimme alle Lösungen der Matrixgleichung

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

über $\mathbb{R}$.

***Aufgabe 12.6** (Entzerrungsalgorithmus). (0 Punkte)

Oder: Wie man vereinfachte Gleichungssysteme „optisch“ löst.

Satz (Entzerrungsalgorithmus). *Die Lösungen eines Gleichungssystems $Ax = b$, dessen Koeffizientenmatrix A bereits in Stufenform ist, kann man wie folgt ablesen:*

Enthält A eine Nullzeile, deren Fortsetzung in b nicht Null ist, so gibt es keine Lösungen.

Andernfalls gibt es Lösungen und wir erhalten sie, indem wir

- *Alle Nullzeilen in $[A|b]$ streichen.*
- *Neue Zeilen der Form*

  $$[0 \ldots 0 \ -1 \ 0 \ldots 0|0]$$

  so einfügen, dass die Hauptdiagonale nur 1 und -1 enthält.

Die Spalten, in denen wir eine -1 eingefügt haben, spannen den Kern auf. Die aus b entstandene rechte Spalte ist eine spezielle Lösung.

Beispiel: Nach Gaußelimination haben wir die Koeffizientenmatrix

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{Zeile einfügen.} \\ \leftarrow \text{Zeile einfügen.} \\ \leftarrow \text{Nullzeile.} \end{array}$$

erhalten. (Die Pivotelemente sind eingekreist.) Nun sollen wir Nullzeilen streichen und Zeilen mit einer -1 einfügen, sodass die Hauptdiagonale nur 1 und -1 enthält. Das sind hier zwei Zeilen.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \end{array}\right].$$

Aus diesem „entzerrten“ Schema lassen sich nun alle Lösungen leicht ablesen: Die Lösungen von $Ax = b$ sind nun genau die Vektoren der Form

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Eine spezielle Lösung haben wir aus der rechten Spalte, die allgemeine Lösung des homogenen Systems bekommen wir aus all den Spalten, in die wir eine -1 eingefügt haben.

(i*) Überprüfe den Satz im angegeben Beispiel.

(ii*) Überprüfe den Satz in weiteren Beispielen.

(iii*) Begründe den Satz.

(iv*) Beweise den Satz. *Hinweis*: Das größte Problem hier ist, eine angemessene Notation zu finden.

12. Übungsblatt zu Mathematik für Informatiker I, WS 2003/04, Mündlicher Teil

JOACHIM VON ZUR GATHEN, OLAF MÜLLER-TOFALL, MICHAEL NÜSKEN

Mündliche Aufgabe 12.7 (Matrixoperationen).

Berechne über $\mathbb{R}$.

(i) $4 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Berechne über $\mathbb{Z}_7$.

(iv) $4 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Mündliche Aufgabe 12.8 (Gleichungssysteme über $\mathbb{Z}_7$).

(i) Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3\cdot x_1 + \quad 1\cdot x_2 + 4\cdot x_3 &= 0 \\ 1\cdot x_1 + \quad 2\cdot x_2 + 0\cdot x_3 &= 1 \\ 0\cdot x_1 + (-1)\cdot x_2 + 1\cdot x_3 &= 0 \end{aligned}$$

über $\mathbb{Z}_7$.

(ii) Bestimme alle Lösungen der Matrixgleichung

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

über $\mathbb{Z}_7$.

Mündliche Aufgabe 12.9 (Inverse Matrix).

Betrachte die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -8 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Bestimme eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A \cdot X = I_3$. (Hier bezeichnet I_3 die 3×3-Einheitsmatrix.) Beachte, dass damit die Spalten x_1, x_2, x_3 von X die Lösungen der Gleichungssysteme $A \cdot x_i = e_i$ sind, wobei e_i die i-te Spalte der Einheitsmatrix ist.

Berechne zur Probe $X \cdot A$.

Bemerkung: Man nennt X die *zu A inverse Matrix*.

Mündliche Aufgabe 12.10 (Gleichungssysteme).

Löse folgendes einmal über $\mathbb{R}$ und einmal über $\mathbb{Z}_{11}$.

(i) Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 1{\cdot}x_1 + 3{\cdot}x_2 + 0{\cdot}x_3 + \quad 1{\cdot}x_4 &= \quad 0, \\ 3{\cdot}x_1 + 6{\cdot}x_2 + 2{\cdot}x_3 + \quad 1{\cdot}x_4 &= \quad 1, \\ 0{\cdot}x_1 + 0{\cdot}x_2 + 2{\cdot}x_3 + (-2){\cdot}x_4 &= -10 \end{aligned}$$

über $\mathbb{R}$.

(ii) Bestimme alle Lösungen der Matrixgleichung

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

über $\mathbb{R}$.

***Oral exercise 12.11** (Hundred prisoners). (0 credits)

Hundred prisoners in separate secluded cells and a prison warden agree to perform the following experiment over a period of time: Each day the warden will select a prisoner purely at random (it is thus possible that a prisoner may be selected multiple times as the days go by) and lead her to a room that contains nothing but a light bulb hanging from a cord from the centre of the ceiling. The prisoner led to the room that day has the option of doing one of the following three things:

- Remain silent and switch the light off if it was on. (If the light was off, leave it off.)
- Remain silent and switch the light on if it was off.
- Make the statement: "All 100 prisoners have now been led to this room."

If the prisoner making a statement is correct, all will go free. If the statement is not correct, all will be executed.

The prisoners performing this experiment cannot communicate in any way (except through on/off state of the light bulb) and they do not see who is being led to the room on any day. What strategy can the prisoners all agree on before they play the game to ensure that they will all go free? They know the game will start with the light bulb initially on.