11. Übungsblatt zu Mathematik für Informatiker I, WS 2003/04

JOACHIM VON ZUR GATHEN, OLAF MÜLLER-TOFALL, MICHAEL NÜSKEN

Abgabe bis Freitag, 23. Januar 2004, 11^{11}
in den jeweils richtigen grünen oder roten Kasten auf dem D1-Flur.

Aufgabe 11.1 (Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit). (3 Punkte)

(i) Zeige, dass die Menge der durch drei teilbaren natürlichen Zahlen abzählbar ist.

(ii) Zeige, dass die Menge $\mathbb{Q}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ der Gaußschen (rationalen) Zahlen abzählbar ist.

(iii) Zeige, dass die Menge $[0, \frac{1}{7}]$ der reellen Zahlen zwischen 0 und $\frac{1}{7}$, je einschliesslich, überabzählbar ist.

Aufgabe 11.2 (Relationen und Eigenschaften). (2 Punkte)

Betrachte die Relation $R = \{(1, 2), (2, 1), (3, 7), (4, 1), (6, 2)\}$.

(i) Stelle sie als Pfeildiagramm und bildlich als Teilmenge von $\{1, \ldots, 6\} \times \{1, \ldots, 7\}$ dar, wie im folgenden Beispiel:

3		•	•	
2	•			
1			•	•
	1	**2**	**3**	**4**

(ii) Ist R eine Funktion?

(iii) Ist R eine Funktion von $\{1, \ldots, 6\}$ nach $\{1, \ldots, 7\}$?

(iv) Ist R^{-1} eine Funktion?

Aufgabe 11.3 (Relationen und Eigenschaften). (6 Punkte)

Sei M die Menge aller Menschen. Beantworte und begründe die folgenden Fragen.

(i) Ist die Relation

$$G = \{(x, y) \in M \times M \mid x \text{ ist Bruder oder Schwester von } y \text{ oder } x = y\}$$

(a) eine Äquivalenzrelation, (b) eine Teilordnung, (c) eine Ordnung?

(ii) Ist die Relation

$$A = \{(x, y) \in M \times M \,|\, x \text{ ist Vorfahr von } y \text{ oder } x = y\}$$

(a) eine Äquivalenzrelation, (b) eine Teilordnung, (c) eine Ordnung?

(iii) Ist die Relation $N = \{(x, y) \in M \times M \,|\, x \text{ ist Nachbar von } y\}$ (a) eine Äquivalenzrelation, (b) eine Teilordnung, (c) eine Ordnung?

(iv) (a) Ist die Relation $V = \{(x, y) \in M \times M \,|\, y \text{ ist Mutter von } x\}$ eine Funktion? (b) Ist V^{-1} eine Funktion?

(v) Ist die Relation $T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x - y \in \mathbb{Z}\}$ (a) eine Äquivalenzrelation, (b) eine Teilordnung, (c) eine Ordnung?

(vi) Ist die Relation $P = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x + y \in \mathbb{Z}\}$ (a) eine Äquivalenzrelation, (b) eine Teilordnung, (c) eine Ordnung?

Aufgabe 11.4 (Funktionen). (5 Punkte)

Untersuche die folgenden Funktionen auf Injektivität und Surjektivität. (Beweise Deine Antworten!)

(i) $c\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x^3$.

(ii) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$.

(iii) $m\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{42},\ x \mapsto x \bmod 42$.

(iv) $w\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x(x+1)(x-1)$.

(v) $p\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{13}^{\times},\ e \mapsto 2^e$.

Aufgabe 11.5 (Schubfachprinzip). (2 Punkte)

Du ziehst Kugeln aus einer Urne, in der sich 10 rote und 10 grüne Kugeln befinden. Wieviele Kugeln musst Du ohne Zurücklegen ziehen, um sicher zu sein, dass Du wenigstens zwei gleiche bekommst? Beweise Deine Antwort.

11. Übungsblatt zu Mathematik für Informatiker I, WS 2003/04, Mündlicher Teil

JOACHIM VON ZUR GATHEN, OLAF MÜLLER-TOFALL, MICHAEL NÜSKEN

Mündliche Aufgabe 11.6 (Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit).

(i) Zeige, dass die Menge der nicht durch drei teilbaren Zahlen abzählbar ist.

(ii) Zeige, dass die Menge $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ der Gaußschen ganzen Zahlen abzählbar ist.

(iii) Zeige, dass die Menge $\mathbb{R}_{>0}$ der positiven reellen Zahlen überabzählbar ist.

Mündliche Aufgabe 11.7 (Relationen und Eigenschaften).

Betrachte die Relation $R = \{(1,4),(2,3),(3,3),(5,7),(6,1)\}$.

(i) Stelle sie als Pfeildiagramm und bildlich als Teilmenge von $\{1,\ldots,6\} \times \{1,\ldots,7\}$ dar.

(ii) Ist R eine Funktion?

(iii) Ist R eine Funktion von $\{1,\ldots,6\}$ nach $\{1,\ldots,7\}$?

(iv) Ist R^{-1} eine Funktion?

Mündliche Aufgabe 11.8 (Relationen und Eigenschaften).

Betrachte die folgenden Familienrelationen (auf der Menge aller Menschen):

- $K := \{(x,y) \mid x \text{ ist Kind von } y\}$.
- $H := \{(x,y) \mid x \text{ ist verheiratet mit } y\}$.
- $W := \{(x,y) \mid x \text{ ist weiblich}\}$.
- $E := K^{-1}$.
- $G := \left\{ (x,y) \,\middle|\, \exists v,m \begin{array}{l} (v,v) \notin W \wedge (x,v) \in K \wedge (y,v) \in K \wedge \\ (m,m) \in W \wedge (x,m) \in K \wedge (y,m) \in K \end{array} \right\}$.
- $S := (G \circ H) \cup (H \circ G)$.

- $K^2 := K \circ K$, $K^3 := K^2 \circ K$, $K^n := K^{n-1} \circ K$, $K^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K^n$.

Dabei soll alles im üblichen Rahmen verstanden werden. (Wir werden also beispielsweise keine Zwitter mit in die Diskussion einbeziehen, oder Pflege- oder Adoptiveltern.)

(i) Beschreibe E, G, S und K^* in Worten.

(ii) Welche der angegebenen Relationen sind reflexiv? Symmetrisch? Antisymmetrisch? Transitiv? Äquivalenzrelation? Teilordnung, Ordnung? Linkstotal? Rechtseindeutig?

Mündliche Aufgabe 11.9 (Funktionen).

Entscheide und beweise:

(i) Sei $f \circ g$ injektiv. Ist dann f injektiv? Ist g injektiv?

(ii) Sei $f \circ g$ surjektiv. Ist dann f surjektiv? Ist g surjektiv?

Mündliche Aufgabe 11.10 (Schubfachprinzip).

Sei $x \in \mathbb{Z}_{42}$. Betrachte die Folge $(1, x, x^2, x^3, x^4, \dots)$ der Potenzen von x. Zeige ohne Verwendung der Sätze von Lagrange, Euler oder dem kleinen Satz von Fermat: ab irgendeiner Stelle beginnt die Folge sich zu wiederholen.

Tipp: Beweise zuerst, dass es zwei Potenzen gibt, die gleich sind.

***Mündliche Aufgabe 11.11** (Ordnungsrelation).

Sei ein Alphabet Σ gegeben und geordnet, etwa das übliche Alphabet $\Sigma = [\mathtt{A}, \mathtt{a}, \mathtt{ä}, \mathtt{B}, \mathtt{b}, \mathtt{C}, \mathtt{c}, \dots, \mathtt{Z}, \mathtt{z}]$ in dieser Reihenfolge. Wir definieren die Relation $\leq_{\text{lex}}$ auf der Menge Σ^* aller endlichen Worte über Σ wie folgt: $x \leq_{\text{lex}} y$, falls der erste Buchstabe von x im Alphabet vor dem ersten Buchstaben von y steht oder diese gleich sind und $x' \leq_{\text{lex}} y'$ gilt für das aus dem zweiten bis letzten Buchstaben von x bestehende Wort x' und das aus dem zweiten bis letzten Buchstaben von y bestehende Wort y'.

(i*) Gilt Automobil $\leq_{\text{lex}}$ Autokran?

(ii*) Gilt Fuchsbau $\leq_{\text{lex}}$ Fragezeichen?

(iii*) Zeige, dass $\leq_{\text{lex}}$ eine Ordnung ist.